Abel in, Kuvvet Serilerinin Yakınsaklık Aralığının Uç Noktalarında davranışı ile ilgili bir teoreminin ispatı:

Bu ispat, Matematik Dünyası Dergisinin 2013 yılı 1. sayısının (MD Sayı 94) 36-37. sayfalarında Tosun Terzioğlu nun yazısında bulunabilir. (O yazıda ve bazı kitaplarda, bizim kullandığımız $\lim_{x \to r^-}$ yerine $\lim_{x \uparrow r}$ kulanılıyor)

Teorem:

Yakınsaklık yarıçapı $0 < r < \infty$ olan bir kuvvet serisinin toplamı $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ olsun. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ yakınsak bir seri ise:

$$\lim_{x \to r^-} g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

olur

İspat:

Önce $r = 1$ özel durumunda ve (her $x \in (-1, 1)$ için) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ iken eşitliği ispatlayalım. Daha sonra genel durum kolayca elde edilecektir. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olduğunu varsayıyoruz.

$k \geq 1$ için $t_k = \sum_{n=0}^{k} a_n$ tanımını yapalım. $a_n = t_n - t_{n-1}$ eşitliğinden

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = a_0 + \sum_{n=1}^{k} (t_n - t_{n-1}) x^n = a_0 + a_k x^k - a_0 x - \sum_{n=1}^{k-1} t_n (x^{n+1} - x^n)$$

$t_0 = a_0$ alarak daha sonra

$$\sum_{n=0}^{k} a_n x^n = (1-x) a_0 + a_k x^k - \sum_{n=1}^{k-1} t_n (x^{n+1} - x^n) = a_k x^k + (1-x) \sum_{n=0}^{k-1} t_n \, x^n$$

elde ederiz. $(-1, 1)$ aralığındaki her x için $\lim a_k x^k = 0$ olduğundan $f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} t_n x^n$ sonucuna varırız. Şimdi $t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ olsun. Geometrik seri toplam formülünden, $-1 < x < 1$ için, $t \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{t}{1-x}$ buluruz. Böylece $f(x) - t = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} (t_n - t) x^n$ sağlanır. Herhangi bir $m \in \mathbb{N}$, $(m \geq 1)$ verildiğinde, yukarıdaki seriyi iki parçaya ayırıp,

$$|f(x) - t| \leq |1-x| \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| |x|^n + \sum_{n=m}^{\infty} |t_n - t| |x|^n \right)$$

eşitsizliğine ulaşırız. Ama $\lim t_n = t$ ve dolayısıyla bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $m \in \mathbb{N}$, $(m \geq 1)$ sayısını, her $n \geq m$ için $|t_n - t| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçelim. Öyleyse

$$|f(x) - t| \leq |1-x| \left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| |x|^n + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=m}^{\infty} |x|^n \right)$$

elde ettik. Amacımız, $x \to 1^-$ iken limiti bulmak olduğundan sadece $(0, 1)$ aralığını gözönüne alalım. Sağdaki ikinci terimde geometrik seri toplam formülünü kullanırsak

$$\sum_{n=m}^{\infty} |x|^n = \frac{|x|^m}{1-|x|} = \frac{x^m}{1-x} < \frac{1}{1-x}$$

elde ederiz. Ayrıca her $x \in (0,1)$ ve her $n \geq 0, (n \in \mathbb{N})$ için $|x|^n \leq 1$ olur. Demek ki elimizde

$$|f(x) - t| < (1-x)\left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| + \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{1}{1-x}\right) = (1-x)\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t| + \frac{\varepsilon}{2}$$

var. Şimdi $\delta = \frac{\varepsilon}{2}\left(\sum_{n=0}^{m-1} |t_n - t|\right)^{-1}$ olsun. $1 - \delta < x < 1$ için $1 - x < \delta$ olur ve

$$|f(x) - t| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

sağlanır. Öyleyse

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

olur. Genel halde ise

$$f(x) = g(rx) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n x^n$$

yazarız. $\lim\limits_{x \to r^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} g(rx)$ olduğu, limit tanımı ile kolayca gösterilebilir (veya kitabımızdaki Limitler için Değişken Değişikliği Teoreminden elde edilir).
Daha önce kanıtladığımız özel hal bize

$$\lim_{x \to r^-} g(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

verir.