MT241 Analiz III Yarıyılsonu Sınavı **09.01.2008**

Öğrenci No, Adı Soyadı :........................ ....

Kurallar. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır. Aşağıda verilen (i),(ii) ve (iii) önermelerini kanıtlamaksızın kullanabilirsiniz. **Sınav 61 puan üzerindendir.**

(i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ dir. (ii) $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$ dir. (iii) $0 < y$ ise $\ln y \leq y - 1$ dir.

SORULAR

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. (3 puan) (Monoton Yakınsaklık) (x_n) bir dizi olsun. (x_n) .... ve .... ise (x_n) .... tır.

b. (3 puan) ($\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismi tamdır) A, $\mathbb{R}$ nin boş ....bir alt kümesi ve A üstten.................................... ise

.... $A \in$ ....

vardır.

c. (3 puan) (Diziler için Cauchy Kriteri) Bir (x_n) dizisinin ....olması için gerek ve yeter koşul verilen her ....>.............. için $n, m \geq N$ olduğunda

|.................... − .... | < ....

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilmesidir.

d. (3 puan) (Bir dizinin limitinin ∞ olması tanımı) (x_n)bir dizi olsun Verilen her ....>............ için .... ≥.................. olduğunda

....

olacak şekilde bir ....$\in \mathbb{N}$ bulunabiliyorsa $\lim x_n = \infty$ olur.

e. (3 puan) (Pozitif terimli bir serinin yakınsaklık kriteri)$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = a_1 + ... + a_n$ olsun. (S_n) üstten........................... ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .... tır.

2. (10 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{2}{4n^2-1} = \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots} - \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$$

olduğundan, bu eşitliği $1, 2, ..., n$ için yazıp taraf tarafa .... serinin S_n kısmi toplamı için

$$S_n = \cdots\cdots\cdots\cdots - \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}$$

elde edilir. O halde

.....................S_n = ...

dir. Dolayısıyla serinin toplamı .... olur.

2. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a. (6 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri, (c_n) pozitif terimli bir dizi ve $\lambda > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda a_n \leq c_n - c_{n+1}$$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n. kısmi toplamı $S_n = a_1 + ... + a_n$ olsun).

b. (4 puan) $0 < p \in \mathbb{R}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ serisi yakınsaktır.

3. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. (2 puan) (a_n) pozitif terimli bir dizi ve (a_n) dizisi .... olsun. İşaret değişimli $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul .... olmasıdır.

b. (8 puan) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{n}$ serisinin **yakınsak** olduğunu gösterelim. $a_n = \frac{\ln n}{n}$ koyalım. $3 \leq n$ ise $0 < \frac{\ln n}{n} = a_n$ dir. (i) den dolayı $3 \leq n$ ise

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< 3 \leq \text{......................} \Longrightarrow \\
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &< \text{......................} \Longrightarrow \\
(n+1)^{\text{...........}} &< n^{\text{...........}} \\
\text{...........} \ln(n+1) &< \text{...........} \ln n \Longrightarrow \\
\frac{\ln \text{...........}}{\text{...........}} &< \frac{\ln \text{...........}}{\text{...........}}
\end{aligned}$$

O halde .... dizisi .... dır. Ayrıca (ii) den dolayı

$$\lim \frac{\ln \text{...........}}{\text{...........}} = \text{...........}$$

olduğundan, işaret değişimli seri testinden dolayı $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisi .... tır.

4. $0 < c \in R$ ve $g(x) = x^3$ olsun.

a. (3 puan) $|x - c| < c$ ise $\left|g(x) - c^3\right| \leq 7c^2 |x - c|$ olduğunu kanıtlayınız. (YG. $x^3 - c^3 = (x - c)\left(x^2 + xc + c^2\right)$ ve $|x - c| < c$ ise $0 < x < 2c$ dir.)

b. (3 puan) Verilen her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - c| < \delta$ olduğunda $\left|g(x) - c^3\right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ bulunuz.

6. (10 puan) $A = [0, \infty)$ olsun. $f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı ve $g : A \to \mathbb{R}$ olsun. $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ ise $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

$f : A \to \mathbb{R}$ sınırlı olduğundan her $x \in A$ için $|f(x)| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ verilsin. $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ olduğundan

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x \;\text{ ve } x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ olduğunda } |\ldots\ldots(\ldots\ldots)| < \frac{\ldots\ldots\ldots}{M}$$

olacak şekilde bir ...... > 0 vardır. O halde

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < x \;\text{ ve } x \in \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ ise } |\ldots\ldots(\ldots\ldots)\ldots\ldots(\ldots\ldots)| < \frac{\ldots\ldots\ldots}{M}\ldots\ldots = \ldots\ldots$$

olur. Dolayısıyla $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = 0$ dır.