MT 241 ANALIZ III Yarıyılsonu Sınavı 11 Ocak 2007
Öğrenci No Adı, Soyadı :

Aşağıda verilen önermelerin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız.
Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar.

i) Her $n \in N$ için

$$1+2+...+n=\frac{n\,(n+1)}{2} \text{ ve } 1^2+2^2+...+n^2=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$

dır.

ii) $y \in \mathbb{R}$, $0 < y$ ve $\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y-1$.

(**Her soru 10 puan dır.**)

1. (x_n) bir dizi olsun. $0 < r < 1$ sabit bir sayı olsun.

   (a) Her $n \in N$ için $|x_{2n}-2| < \frac{1}{2n}$ ve $|x_{2n+1}-3| < r$ oluyorsa (x_n) yakınsak olabilir mi? Neden?

   (b) Her $n \in N$ için $|x_{2n}-2| < \frac{1}{2n}$ ve $|x_{2n+1}-3| < 1$ olduğu halde yakınsak olan bir dizi örneği bulunuz.

2. $x_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right)+...+\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$ dizisinin limitinin $\frac{1}{2}$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki kanıtdaki boşlukları doldurunuz.

   $1 \leq k \leq n$ olsun. $1-\frac{k^2}{n^4} < 1$ olduğundan

$$1-\frac{k}{n^2} < \frac{1}{1+\frac{k}{n^2}}$$

   olur. Her iki tarafı $\frac{k}{n^2}$ ile çarparak

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{n^4} < \frac{\frac{k}{n^2}}{1+\frac{k}{n^2}}$$

   elde edilir. O halde (*ii*) den dolayı

$$\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}-\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots} < \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$$

   Bu eşitsizlikler $k=1,2,..,n$ için toplanırsa

$$\frac{\ldots.(\ldots\ldots..)}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} - \frac{\ldots.(\ldots\ldots..)(\ldots\ldots..)}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq x_n \leq \frac{\ldots.(\ldots\ldots..)}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

bulunur. $\lim \frac{\ldots\ldots\ldots(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{1}{2}$ ve $\lim \frac{\ldots.(\ldots\ldots\ldots\ldots)(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = 0$ olduğundan, Sandviç Teoreminden

$\lim x_n = \frac{1}{2}$ elde edilir.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ serisinin ıraksak olduğunu kanıtlayan aşağıdaki kanıtlardaki boşlukları doldurunuz.

H_n bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $k \in \mathbb{N}$ ise (ii) de $y = 1 + \frac{1}{k}$ alınırsa

$$\ln(\ldots. + \ldots.) - \ln \ldots. = \ln\left(1 + \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) \leq \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

elde edilir. Bu eşitsizlik $k = 1, 2, .., n$ için taraf, tarafa toplanırsa

$$\ln(\ldots. + \ldots.) = \ln(\ldots. + \ldots.) - \ln \ldots.. < \ldots. + \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} + \cdots + \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} = \ldots..$$

bulunur. $\lim [\ln(\ldots. + \ldots.)] = \infty$ olduğundan $\lim H_n = \infty$.olur. O halde seri ıraksaktır.

4. Aşağıdaki ifadelerdeki boşlukları doldurunuz.

(a) ($\mathbb{R}$ nin tam olma özelliği) $\mathbb{R}$ de.......... olmayan ve üstten .... olan her kümenin bir en .... vardır.

(b) (x_n) bir dizi ve $x \in \mathbb{R}$ olsun. $\lim x_n = x$ olması için gerek ve yeter koşul verilen her .... > ..... için $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq$ .... olduğunda |....... − ....| .... olacak şekilde bir .... $\in \mathbb{N}$ olmasıdır.

(c) (x_n) bir dizi olsun. (x_n) nin bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul verilen her .... > ..... için $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n, m \geq$ .... olduğunda |....... − ....| .... olacak şekilde bir .... $\in \mathbb{N}$ olmasıdır.

(d) (Azalan diziler için Monoton Yakınsaklık) (x_n) monoton azalan bir dizi olsun. (x_n) .... ise (x_n) .... ve

$$\lim x_n = \ldots\ldots\ldots. \{x_n : n \in N\}$$

dir.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi verilsin. $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = a_1 + .. + a_n$ ise (A_n) ye serinin .... denir. Serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (A_n) nin ....olmasıdır. Bu durumda serinin toplamı .... olarak tanımlanır.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(2n+9)}$ serisinin toplamını hesaplayan aşağıdaki işlemlerdeki boşlukları doldurunuz.

$A_n = a_1 + .. + a_n$ olsun. $a_n = \frac{1}{(2n+1)(2n+9)} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{\ldots\ldots} - \frac{1}{\ldots\ldots}\right)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ldots\ldots} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ldots\ldots}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\ldots\ldots} - \sum_{k=5}^{n+4}\frac{1}{\ldots\ldots}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\sum_{k=1}^{4}\frac{1}{\ldots\ldots} + \sum_{k=5}^{n}\frac{1}{\ldots\ldots} - \sum_{k=5}^{n}\frac{1}{\ldots\ldots} - \sum_{k=n+1}^{n+4}\frac{1}{\ldots\ldots}\right)\\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9} - \sum_{k=n+1}^{n+4}\frac{1}{\ldots\ldots}\right)
\end{aligned}$$

$i = 3, 5, 7, 9$ için $\lim \frac{1}{2n+i} = 0$ olduğundan serinin toplamı

$$\frac{1}{8}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) = \frac{31}{315}$$

olur.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ serisi yakınsak ve toplamı S olsun. (na_n) dizisi yakınsak ve $\lim na_n = \alpha$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ de yakınsak olduğunu gösteren ve serinin toplamını bulan aşağıdaki işlemlerdeki boşlukları doldurunuz.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(a_k - a_{k+1}\right)$ ise $\lim S_n = S$ dir. $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ olsun

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ldots\cdot\ldots\ldots - \sum_{k=1}^{n} \ldots\cdot\ldots\ldots\\
&= \sum_{k=1}^{n} \ldots\cdot\ldots\ldots - \sum_{k=2}^{n+1} (\ldots - \ldots)\cdot\ldots\ldots\\
&= 1\cdot a_1 + \sum_{k=2}^{n} \ldots\cdot\ldots\ldots - \sum_{k=2}^{n} (\ldots - \ldots)\cdot\ldots\ldots - \ldots\cdot\ldots\ldots\\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \ldots\ldots\right) - (\ldots\cdot\ldots\ldots) = \ldots\ldots - \ldots\cdot\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Buradan

$$A_n = S_n + \frac{n}{n+1}(\ldots\ldots + \ldots)\cdot\ldots\ldots$$

$((\ldots\ldots + \ldots\ldots)\cdot\ldots)$ dizisi (na_n) dizisinin alt dizisi olduğundan limiti α dır. O halde $\lim A_n = S + \alpha$ olup $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin toplamı $S + \alpha$ dır.