2006-07 Güz Dönemi **MT 241 ANALİZ III** **Ara Sınav** 16 Kasım 2006
Öğrenci No:
Ad Soyad:
İmza:

Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar. **Bu sınav için değerlendirme 40 puan üzerinden yapılacaktır.**

SORULAR

1. **(7,5 puan)** $\phi \neq A \subseteq (0, \infty)$ ise $\inf A = \beta > 0$ ise $\sup\left\{\frac{1}{x} : x \in A\right\} = \frac{1}{\beta}$ olduğunu kanıtlayan aşağıdaki önermelerdeki boşlukları tamamlayınız.

   $C = \left\{\frac{1}{x} : x \in A\right\}$ koyalım. $\phi \neq A \subseteq (0, \infty)$ olduğundan $C \neq \emptyset$ ve C de hiç olmazsa bir pozitif eleman vardır. $\inf A = \beta > 0$ olduğundan her $x \in A$ için

   $$0 < \ldots\ldots\ldots\ldots \leq \ldots\ldots\ldots\ldots$$

   dir. O halde ters çevirecek olursak

   $$0 < \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

   elde edilir. O halde $\frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ sayısı C kümesinin bir üst sınırıdır. C boş olmadığından ve .... olduğundan $\gamma = \sup C$ vardır. C de hiç olmazsa bir pozitif eleman olduğundan $0 < \gamma$ dır. Ayrıca $\frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ sayısı C kümesinin bir üst sınırı olduğundan

   $$\ldots\ldots\ldots\ldots \leq \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \qquad ((1))$$

   dir.

   Şimdi her $x \in A$ için

   $$\frac{1}{x} \leq \sup C = \gamma \text{ dolayısıyla } \frac{1}{\gamma} \leq x$$

   dir. O halde O halde $\frac{1}{\gamma}$ sayısı A kümesinin bir ....sınırıdır. $\inf A = \beta$ olduğundan

   $$\frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ dolayısıyla } \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad ((2))$$

   olur. O halde (1) ve (2) den dolayı

   $$\frac{1}{\beta} = \gamma$$

   dır.

2. **(5,5 puan)** (x_n) dizisinin tüm terimleri pozitif olsun ve her $n \in \mathbb{N}$ için

   $$x_{n+1} - x_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

   koşulunu sağlasın. (x_n) dizisinin yakınsak olduğunu gösteriniz. ($n \in N$ olsun. $y_n = x_n + \frac{1}{n}$ dizisini göz önüne alınız.)

3. $n \in \mathbb{N}$ ve $0 < x$ ise $1 + nx \leq (1+x)^n$ olduğunu biliyoruz. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

(a) **(4 puan)** $\sqrt{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$ dir.

(b) **(4 puan)** $1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ dir. ((a) da her iki tarafın karesini alınız.)

(c) **(3 puan)** $\lim \sqrt[n]{n} = 1$ dir.

4. **(5 puan)** Aşağıdaki teoremler deki boşlukları doldurunuz.

(a) (Artan diziler için Monoton Yakınsaklık) (x_n) monoton artan bir dizi olsun.ve .... ise (x_n) .... ve $\lim x_n =$ .... $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ dir.

(b) (Bolzano-Weirstrass) (x_n) .... bir dizi ise (x_n) nin .... bir .... vardır.

(c) (Cauchy Kriteri) Bir (x_n) dizisinin .... olması için gerek ve yeter koşul (x_n) nin bir .... dizisi olmasıdır.

5. (x_n) dizisi

$$x_1 = 0 \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } x_{n+1} = \frac{2 + x_n}{3 + x_n}$$

olarak tanımlanan dizi olsun. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

(a) **(4 puan)** $0 \leq x < y$ ise $\frac{2+x}{3+x} < \frac{2+y}{3+y}$ dir.

(b) **(4 puan)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq x_n < x_{n+1}$ dir.(Tümevarımda n den $n+1$ e geçerken (a) da $x = x_n$, $y = x_{n+1}$ alınız.)

(c) **(3 puan)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 1$ dir.