MT241 Analiz III
2005-06 Güz Dönemi Final Sınavı
19.01.2006

Öğrenci No :
Adı Soyadı :
İmza:

Aşağıda verilen önermelerin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar. **Bu sınav için değerlendirme 60 üzerinden yapılacaktır.**

β) (a_n) bir dizi ve $\lim a_n = 0$ olsun. $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ ise $\lim \dfrac{A_n}{n} = 0$ dır.

SORULAR

1. Aşağıdaki tümcelerdeki boş yerleri tamamlaynız.

   (a) **(4 puan)** (x_n) bir dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. Tanım gereği $\lim x_n = L$ olması için gerek ve yeter koşul verilen her $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda |............ $-$ ....| .... olacak şekilde bir ....$\in \mathbb{N}$ bulunabilmesidir.

   (b) **(4 puan)** Monoton Yakınsaklık Teoremine göre (x_n) .... ve .... bir dizi ise (x_n) ....tır.

   (c) **(4 puan)** (x_n) bir dizi olsun. Bolzano-Weirstrass Teoremine göre (x_n) .... bir dizi ise (x_n) nin .... bir .... dizisi vardır.

   (d) **(4 puan)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir seri olsun. $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Tanım gereği $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olması .... dizisinin .... olması demektir. Seri yakınsak ise serinin toplamı .... dir. Örneğin $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{i\,(i+1)} = 1 - \dfrac{1}{n+1}$ olduğundan bu serinin toplamı .... dir.

   (e) **(4 puan)** **'Gerçel sayılar cismi $\mathbb{R}$ tamdır.'** tümcesinden ne anladığınızı yazınız.

2. (a_n) pozitif terimli azalan bir dizi ve $\lim a_n = 0$ olsun. $A_n = a_1 + \cdots + a_n$ koyalım. Aşağıdakileri kanıtlayınız.

   (a) **(5 puan)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{A_{n+1}}{n+1} \leq \dfrac{A_n}{n}$ dir.(İpucu : (a_n) nin azalan olduğunu gözönüne alınız.)

   (b) **(5 puan)** $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{A_n}{n}$ serisi yakınsaktır.(İpucu : (a) ve (β) yı kullanınız.)

3. (t_n) terimleri pozitif olan bir dizi ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri olsun. $0 < K$ bir sabit olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$Ka_n \leq t_n - t_{n+1}$$

   oluyorsa Aşağıdakileri kanıtlayınız.

   (a) **(5 puan)** $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ ise her $n \in \mathbb{N}$ için $KS_n \leq t_1 - t_{n+1}$ dir.

   (b) **(5 puan)** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsaktır.

4. $x_1 = 1$ ve $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ olarak tanımlanan (x_n) dizisi verilsin. Aşağıdakileri kanıtlayınız.

   (a) **(4 puan)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < x_n < 2$ dir.(İpucu : Tümevarım kullanınız.)

(b) **(3 puan)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ dir.(İpucu : $x_{n+1}^2 - x_n^2$ yi x_n cinsinden yazarak (a) yı kullanınız.)

(c) **(3 puan)** (x_n) yakınsaktır ve limiti 2 dir.

5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = \dfrac{n^2}{8^n}$ olsun.

(a) **(5 puan)** Her $n \in \mathbb{N}$ için $n^3 \leq 8^n$ olduğunu tümevarım kullanarak gösteriniz.

(b) **(5 puan)** (a) dan faydalanarak $\lim x_n = 0$ olduğunu kanıtlayınız.