MT 241 ANALIZ III

20 Kasım 2003

Prof. Dr. Yusuf ÜNLÜ   Name: ______________________________

1) Tümevarım kullanarak aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

a) $2 \leq n \in \mathbb{N}$ ise $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$ olduğunu gösteriniz.

b) $1 \leq k \in \mathbb{N}$ ise

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$

olduğunu kanıtlayınız.

2) $\phi \neq S \subseteq \mathbb{R}$ ve $a \in \mathbb{R}$ ise $a + S = \{a + s : s \in S\}$ olarak tanımlanır. S alttan sınırlı ise $a + S$ nin alttan sınırlı ve

$$\inf(a + S) = a + \inf S$$

olduğunu kanıtlayınız.

3) $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ ise $x^n - 1 \leq nx^n (x - 1)$ dir. Kanıtlayınız.

4) $a \in (0, \infty)$ olduğuna göre $\{x_n\}$ dizisi

$$x_1 = \frac{1}{2}(a + 1) \text{ ve } n \geq 1 \text{ için } x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

olarak tanımlanan dizi olsun.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sqrt{a} \leq x_n$.

b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} \leq x_n$.

c) $\lim x_n = \sqrt{a}$.

5) $a \in \mathbb{R}$ ise $\lim \frac{a^n}{n!} = 0$ olduğunu gösteriniz.

6) $a \in \mathbb{R}$ ve $f : [a, \infty) \longrightarrow [a, \infty)$ artan bir fonksiyon olsun. $x_1 \in [a, \infty)$ ve $x_{n+1} = f(x_n)$ olarak tanımlanan (x_n) dizisi için $x_2 \leq x_1$ ise (x_n) yakınsak olduğunu kanıtlayınız.