MT241 Analiz III, 2. Arasınav 12.12.2001

Öğrenci No, Adı Soyadı :........................ ....

Kurallar. Aşağıda birtakım önermeler ve bir takım eksiklerle bu önermelerin kanıtları verilmiştir. Kanıtlardaki boşlukları doldurunuz. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır. Aşağıda verilen (i) ve (ii) önermelerini kanıtlamaksızın kullanabilirsiniz.

i) (a_n) ve (b_n) dizileri ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < b_n < b_{n+1}$, $\lim b_n = \infty$ ve $\lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$ ise $\lim \frac{a_n}{b_n} = L$ dir.

ii) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ olsun. (x_n) nin yakınsak ve $\lim x_n = \gamma$ dır.

SORULAR

1. $a_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ olsun. (a_n) nin yakınsak ve $\lim a_n = \ln 2$ olduğunu gösteriniz.

- Her $n \in \mathbb{N}$ için $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ ve $x_n = H_n - \ln n$ koyalım. (ii) den dolayı $\lim x_n = \gamma$ dir.

$$a_{\dots\dots\dots\dots} + H_{\dots\dots\dots\dots\dots}$$
$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \dots\dots\dots\dots + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$

olur. Bu son toplam ise yeniden düzenlenecek olursa

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \dots\dots\dots\dots\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right) + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \left(-\frac{1}{2n} + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}\right)$$
$$1 + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} + \frac{1}{3} + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$$
$$H_{\dots\dots\dots\dots\dots}$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned} a_{\dots\dots\dots\dots} + H_{\dots\dots\dots\dots\dots} &= H_{\dots\dots\dots\dots\dots} \Longrightarrow a_{\dots\dots\dots\dots} + H_{\dots\dots\dots\dots\dots} - \ln n = H_{\dots\dots\dots\dots\dots} - \ln(2n) + \ln 2 \\ &\Rightarrow a_{\dots\dots\dots\dots} = x_{\dots\dots\dots\dots\dots} - x_{\dots\dots\dots\dots\dots} + \ln 2 \end{aligned}$$

O halde $\lim a_{\dots\dots\dots\dots} = \gamma - \gamma + \ln 2 = \ln 2$ dir.

$$a_{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} = a_{\dots\dots\dots\dots} + \frac{1}{2n+1}$$

olduğundan $\lim a_{\dots\dots\dots\dots} = \ln 2 + 0 = \ln 2$ dir. O halde $\lim a_n = \ln 2$ olur.

2. (x_n) dizisi $x_n = \frac{\ln(n!) - n\ln n}{n}$ olsun. $\lim x_n = -1$ ve bundan faydalanarak .$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$ olduğunu gösteriniz.

- $a_n =$ .... ve $b_n =$ .... koyalım. (b_n) dizisi .... ve $\lim b_n =$ .... dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} &= \ln \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} - (\cdots\cdots + 1)\ln(\cdots\cdots + 1) + \cdots\cdots \ln \cdots\cdots \\ &= n \ln \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} = \ln \frac{1}{(1 + \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots})^{\cdots\cdots}} \end{aligned}$$

O halde $\lim \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \ln \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} =$ .... dir. Buradan $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim x_n =$ .... elde edilr. Böylece

$$\lim e^{x_n} = \cdots\cdots$$

olur. Fakat

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{\ln(n!) - n\ln n}{n} \\ &= \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \ln(\cdots\cdots) - \ln \cdots\cdots \\ &= \ln(\cdots\cdots) - \ln \cdots\cdots \\ &= \ln \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \end{aligned}$$

olduğundan

$$e^{x_n} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

Dolayısıyla

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

olur.

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+4)}$ serisi yakınsaktır.

- $a_n = \frac{3\cdot 6\cdot \ldots \cdot (3n)}{7\cdot 10\cdot \ldots \cdot (3n+4)}$ koyalım. Bu durumda

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \, \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}$$
$$= \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

olur. Bu oranın limiti 1 dir. O halde .... testini uygulamayı deneyelim.

$$\ldots\ldots\ldots \left(1 - \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

olduğundan

$$\lim \ldots\ldots\ldots \left(1 - \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right) = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots} > 1$$

olur. O halde $\sum a_n$ ....dır.

4. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $16^4 < n$ için $\frac{n^4}{e^{\sqrt{n}}} < 1$ olduğunu gösteriniz ve bundan faydalanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}$ serisinin yakınsak olduğunu gösteriniz.

- Her $16^4 < n$ için

$$\begin{aligned} \ln n^4 &= 4 \ln \ldots\ldots\ldots \\ &= 16 \ln \left(\sqrt[\ldots\ldots]{\ldots\ldots\ldots} \right) < 16 \left(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - 1 \right) \\ &< 16 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < \sqrt[\ldots\ldots]{\ldots\ldots\ldots} \sqrt[\ldots\ldots]{\ldots\ldots\ldots} = \sqrt{\ldots\ldots\ldots} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$n^4 = e^{\ln \ldots\ldots\ldots\ldots} < e^{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

bulunur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ ve $16^4 < n$ için $\frac{n^4}{e^{\sqrt{n}}} < 1$ dir. Bu eşitsizlikten dolayı $16^4 < n$ için

$$\frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}} < \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

olur. Fakat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots}$$

serisi .... olduğundan .... Teoremi nedeniyle $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^{\sqrt{n}}}$ de yakınsaktır.

5. $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri ve (nd_n) sınırlı veya $\lim nd_n = \infty$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$ serisinin ıraksak olduğunu kanıtlayınız.

- 1. durum : (nd_n) sınırlı olsun. Pozitif bir $K \in \mathbb{R}$ ile her $n \in \mathbb{N}$ için $0 <$ .... $<$ .... olur. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$1 + \dots\dots\dots\dots \quad < \quad 1 + \dots\dots\dots\dots \Longrightarrow \frac{1}{\dots\dots\dots\dots} > \frac{1}{\dots\dots\dots\dots}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots} > \frac{1}{\dots\dots\dots\dots} d_n$$

O halde .... Teoreminden dolayı $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{1+nd_n}$ serisi ıraksaktır.

- 2. durum : $.a_n = \frac{d_n}{1+nd_n}$ koyacak olursak

$$\frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\frac{1}{n}} = \frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots\dots} = 1 - \frac{1}{\dots\dots\dots\dots}$$

olur. $\lim nd_n = \infty$ olduğundan

$$\lim \frac{1}{\dots\dots\dots\dots} = 0$$

olduğundan

$$\lim \frac{\dots\dots\dots\dots\dots}{\frac{1}{n}} = 1$$

dir. Böylece ....-Teoreminden dolayı $\sum a_n \backsim \sum$ .... dır. $\sum$ .... ıraksak olduğundan $\sum a_n$ de ıraksaktır.