MT 241 ANALİZ 3
ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) $n = 1$ için $5^{2n} - 1 = 24$ ve $8 \mid 24$ olduğu için önerme, $n = 1$ için doğrudur.

   (b) Bir $n \in \mathbb{N}$ için, $8 \mid 5^{2n} - 1$ olsun. $5^{2(n+1)} - 1 = 5^{2n+2} - 5^{2n} + 5^{2n} - 1 = 5^{2n} \cdot 24 + (5^{2n} - 1)$ dir. $8 \mid 24$ olduğu için $8 \mid 24 \cdot 5^{2n}$ olur. Tümevarım Hipotezinden, $8 \mid (5^{2n} - 1)$ dir. Bunlardan, $8 \mid (5^{2(n+1)} - 1)$ elde ederiz.

   Tümevarım ilkesinden, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $8 \mid 5^{2n} - 1$ doğrudur.

2. (a) i. $\dfrac{2n}{3n+1} = \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{6n+3}$ olduğu (ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $6n + 3 > 0$ olduğu) için: $\forall x \in A$ için $x < \frac{2}{3}$ sağlanır.
   Bu da $\frac{2}{3}$ ün, A için, bir üst sınır olması demekdir.

   ii. $\varepsilon > 0$ olsun. ($\mathbb{R}$ nin Arşimet Özelliğinden) $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$ olacak şekilde (en az) bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu sayı için $\dfrac{2n_0}{3n_0+1} \in A$ olur ve $6n_0 + 3 > 2n_0 > \frac{2}{\varepsilon}$ olduğu için, ($\dfrac{2}{6n_0+3} < \varepsilon$ olur ve buradan) $\dfrac{2}{3} - \varepsilon < \dfrac{2n_0}{3n_0+1}$ olur.

   Bu iki özellikten dolayı, $\sup A = \frac{2}{3}$ olur.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\dfrac{2}{6n+3} \leq \dfrac{2}{9}$ olduğu için $\forall n \in \mathbb{N}$ için, $\dfrac{2n}{3n+1} \geq \dfrac{2}{3} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{2}$ yani $\forall x \in A$ için $x \geq \frac{1}{2}$ olur. $\frac{1}{2} \in A$ olduğu için, A nın her alt sınırı s için $s \leq \frac{1}{2}$ olur. Dolayısıyla, $\inf A = \frac{1}{2}$ dir.

3. $\mathbb{Q}$ nun ($\mathbb{R}$ de) yoğun olduğu derste gösterilmiştir.

4. (a) $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğun olduğu için) $-\varepsilon < x < 0$ olacak şekilde (en az) bir $x \in \mathbb{Q}$ vardır. Dolayısıyla (bu) $x \in B \cap V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}$ olur. Dolayısıyla, $0 \in B'$ olur.

   (b) $\varepsilon = 1$ olsun. $V_\varepsilon(1) = (0, 2)$ dir. Buradan; $B \cap V_\varepsilon(1) = \{1\}$ olur. $B \cap V_\varepsilon(1) \setminus \{1\} = \emptyset$ olduğu için $1 \notin B'$ dır.

5. (a) $1 \in C$ dir. $\varepsilon > 0$ olsun. $1 + \frac{\varepsilon}{2} \in V_\varepsilon(1) = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$ ama ($\forall x \in C$ için $x \leq 1$ olduğu için), $1 + \frac{\varepsilon}{2} \notin C$ dir. Bu nedenle ($\forall \varepsilon > 0$ için), $V_\varepsilon(1) \nsubseteq C$ dir. Bu da C nin açık küme olmadığını gösterir.

   (b) $D = \complement C = C^c = \mathbb{R} \setminus C$ olsun. D nin bir açık küme olduğunu gösterelim. ($\dfrac{3^n}{3^n+2} = 1 - \dfrac{2}{3^n+2}$ olduğu için) $C \subset [\frac{3}{5}, 1]$ olduğu aşikardır. $x \in D$ olsun.

   i. $x < \frac{3}{5}$ ise $\varepsilon = \frac{3}{5} - x$ olsun. $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, \frac{3}{5}) \subset D$ olur.

   ii. $\frac{3}{5} < x < 1$ ise (n arttıkça $\dfrac{3^n}{3^n+2}$ arttığı için) $\dfrac{3^n}{3^n+2} < x < \dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}+2}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\varepsilon = \min\{x - \dfrac{3^n}{3^n+2}, \dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}+2} - x\}$ olsun. ($\dfrac{3^n}{3^n+2}$ ile $\dfrac{3^{n+1}}{3^{n+1}+2}$ arasında C nin elemanı olmadığı için) $V_\varepsilon(x) \subseteq D$ olur.

   iii. $x > 1$ ise $\varepsilon = x - 1$ olsun. $V_\varepsilon(x) = (1, x + \varepsilon) \subseteq D$ olur. Bu da D nin açık küme olması, dolayısıyla, C nin kapalı küme olması demekdir.

6. $\varepsilon > 0$ verilsin. ($\forall n \geq K$ için $\left| \dfrac{2n^2-1}{5n^2+4} - \dfrac{2}{5} \right| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $K \in \mathbb{N}$ bulmalıyız.)

$$\left| \frac{2n^2-1}{5n^2+4} - \frac{2}{5} \right| = \left| \frac{-13}{5(5n^2+4)} \right| = \frac{13}{5(5n^2+4)} < \frac{13}{25n^2} \leq \frac{13}{25K^2} \leq \varepsilon$$

Son eşitsizliğin sağlanması için $K \geq \sqrt{\frac{13}{25\varepsilon}}$ seçmek yeterli olacaktır. $K = \left\lfloor \sqrt{\frac{13}{25\varepsilon}} \right\rfloor + 1$ alındığında bu sağlanacaktır.