MT241 Analiz III Yarıyılsonu Sınavı 14.01.2010

Öğrenci No, Adı Soyadı :........................ ....

Kurallar. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır. Aşağıda verilen (i),(ii) ve (iii) önermelerini kanıtlamaksızın kullanabilirsiniz. **Sınav 61 puan üzerindendir.**

(i) $0 < y$ ise $\ln y \leq y - 1$ dir. (ii) $0 < x$ ve $1 < r$ ise $1 + rx < (1 + x)^r$ dir (iii) $\lim x_n = 0$ ve $0 \neq x_n$ ise $\lim \dfrac{\ln(1 + x_n)}{x_n} = 1$

SORULAR

1. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. (3 puan) (İç, İçe Aralıklar İlkesi) $n \in \mathbb{N}$ için $[a_n, b_n]$ kapalı aralıkların bir dizisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $[a_{.............}, b_{.............}] \subset [a_{.............}, b_{.............}]$ olsun.

$$\inf \{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$$

ise

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$$

kümesinde .... ve .yalnız .... eleman ....dır.

b. (3 puan) ($\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismi tamdır) A, $\mathbb{R}$ nin boş ....bir alt kümesi ve A nin alltan.................................... ise

.... $A \in$ ....

vardır.

c. (3 puan) (Seriler için Cauchy Kriteri) Bir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ serisinin ....olması için gerek ve yeter koşul verilen her ....>.............. için $m > n \geq N$ olduğunda

$$|x_{..............} + x_{..............} + \quad + x_{..............}| < ....$$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilimesidir.

d. (3 puan) (Bir serinin toplamının a olmasının tanımı) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$bir seri ve serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = x_1 + ... + x_n$ olsun.olsun Tanım gereği, serinin toplamının a olması için gerek ve yeter koşul Verilen her

.... =....................... olmasıdır.

e. (3 puan) (Pozitif terimli bir serinin yakınsaklık kriteri)$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = a_1 + ... + a_n$ olsun. Serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (S_n) nin ....olmasıdır.

2. (10 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$ serisinin toplamını bulunuz.

$$\frac{2}{n^2 + 4n + 3} = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} - \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

olduğundan, bu eşitliği $1, 2, ..., n$ için yazıp taraf tarafa .... serinin S_n kısmi toplamı için

$$S_n = \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} + \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} - \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} - \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

elde edilir. O halde

.....................S_n = ...

dir. Dolayısıyla serinin toplamı .... olur.

2. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız .

a. (6 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri, (b_n) pozitif terimli bir dizi ve $\lambda > 0$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda a_n \leq b_n a_n - b_{n+1} a_{n+1}$$

ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsaktır. ($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin n. kısmi toplamı $S_n = a_1 + ... + a_n$ olsun.)

b. (4 puan) $0 < p \in \mathbb{R}$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^p}\right)$ serisi yakınsaktır.

3. Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

a. (2 puan) (a_n) pozitif terimli bir dizi ve (a_n) dizisi .... olsun. İşaret değişimli $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul .... olmasıdır.

b. (8 puan) $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$ serisinin **yakınsak** olduğunu gösterelim. $a_n = 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ koyalım. $1 \leq n$ ise (i) den dolayı $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ olduğundan

$$0 < 1 - n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n+1}$$

O halde $\lim a_n =$ ....dır. . (ii) den dolayı $1 \leq n$ ise

$$\begin{aligned}
1 + \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots} &< \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{n}} \Longrightarrow \\
\left(1 + \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\right)^{n} &< \left(1 + \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\right)^{n+1} \Longrightarrow \\
\cdots\cdots\cdots \ln\left(1 + \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\right) &< \cdots\cdots\cdots \ln\left(1 + \frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}\right) \Longrightarrow \\
a_{\cdots\cdots\cdots} &< a_{\cdots\cdots\cdots}
\end{aligned}$$

Ohalde .... dizisi .... dır. O halde, işaret değişimli seri testinden dolayı $\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ serisi .... tır.