MT241 Analiz III Yarıyılsonu Sınavı 13.01.2009

Öğrenci No, Adı Soyadı :........................ ....

Kurallar. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır. Aşağıda verilen (i),(ii) ve (iii) önermelerini kanıtlamaksızın kullanabilirsiniz. **Sınav 60 (+5 bonus) puan üzerindendir.**

(i) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ise $\lim x_n = \gamma \in \mathbb{R}$ dir.

(ii) $\lim x_n = \infty$ ise $\lim \frac{x_n^6}{e^{x_n}} = 0$ dır. (iii) $1 < y$ ise $\ln y < y - 1$ dir.

1. (15 puan) Aşağıdaki boşlukları doldurunuz.

   a. (Monoton Yakınsaklık) (x_n) bir dizi olsun. (x_n) .... ve .... ise (x_n) .... tır.

   b. ($\mathbb{R}$ gerçel sayılar cismi tamdır) A, $\mathbb{R}$ nin boş ....bir alt kümesi ve A nin üstten.................................... ise

   .... $A \in$ ....

   vardır.

   c. (Seriler için Cauchy Kriteri) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir seri olsun. Verilen her her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilsin ki, $n \geq$.................. ve $k \in \mathbb{N}$ ne olursa olsun

   |.................. + ... $+ \cdots +$ .... | $<$ ....

   oluyorsa seri..............................

   d. (Serinin yakınsaklığının ve toplamının tanımı) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir seri olsun $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olarak tanımlanan (A_n) dizisine serinin .... dizisi denir. Serinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (......................) dizisinin yakınsak olmasıdır. Seri yakınsak ise serinin toplamı lim....................olarak tanımlanır.

   e. (Pozitif terimli bir serinin yakınsaklık kriteri)$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli bir seri ve serinin kısmi toplamlar dizisi $S_n = a_1 + ... + a_n$ olsun. (S_n) .... ise $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .... tır.

2. (10 puan) $z_n = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ olsun. $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ koyalım. Aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   a. $z_{2n} = H_{2n} - H_n$ dir.

b. $\lim z_n = \ln 2$ dir. (İp ucu : (i) yi ve (a) yı kullanınız.)

3. (10 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri ve $D_n = \sum_{k=1}^{n} d_k$ olsun. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^2}$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bunun için aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   a) $n \geq 2$ ise $\frac{d_n}{D_n^2} < \frac{1}{D_{n-1}} - \frac{1}{D_n}$ dir.

   b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k}{D_k^2}$ olsun. $n \geq 2$ ise $S_n < \frac{2}{d_1}$ dir.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{D_n^2}$ yakınsaktır.

4. (10 puan) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksak olduğunu kanıtlamak istiyoruz. Bunun için aşağıdaki önermeleri kanıtlayınız.

   a) Her $1 \leq n$ için $\ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$ dir.

b) Her $1 \leq n$ için $\ln(n+1) < H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ dır.(İp ucu : (a) yı $1, 2, ..., n$ için yazıp toplayınız.)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ıraksaktır. (İp ucu : (b) yi kullanırsak $\lim H_n$ limiti ne olur?)

5. (15 puan) Aşağıda genel terimleri verilen serilerin yakınsaklığını inceleyiniz.

(a) $a_n = \frac{n}{e^{\sqrt{n}}}$ (İp ucu : (ii) de $x_n = \sqrt{n}$ alınız ve seriyi uygun bir $b_n = \frac{1}{n^?}$ serisi ile karşılaştırınız.)

(b) $a_n = \frac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

(c) $a_n = (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

6. (5 puan) $0 < \lambda$ olduğuna göre $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+\lambda)(n+\lambda+2)}$ serisinin toplamını bulunuz.