MT241 Analiz III, 1. Arasınav 19.11.2001

Öğrenci No, Adı Soyadı :........................ ....

Kurallar. Aşağıda birtakım önermeler ve bir takım eksiklerle bu önermelerin kanıtları verilmiştir. Kanıtlardaki boşlukları doldurunuz. Verilen alan dışında yazılan yazılar cevap olarak puanlamada dikkate alınmayacaktır.

1. (x_n) dizisi $x_n = \frac{2^n}{n!}$ olsun. $\lim x_n = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

   (a) Her $6 \leq n \in \mathbb{N}$ için $2^n \leq (n-1)!$ olduğunu tümavarım ile kanıtlayınız.

   - $n = 6$ ise .... < .... olduğundan .... dır.
   - $n \geq 6$ ve $2^n < (n-1)!$ olduğunu varsayalım. Her iki tarafı .... ile çarparak .... < .... elde.edilir. Fakat $2 < 6 \leq n$ olduğundan

   $$\ldots\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots < n \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots = n!$$

   bulunur. O halde önerme .... için de doğrudur.

   (b) $\lim x_n = 0$ olduğunu kanıtlayınız.

   - Her $6 \leq n \in \mathbb{N}$ için $2^n \leq (n-1)!$ olduğundan $0 <$ .... $< \frac{1}{n}$ olur. $\lim 0 = 0$, $\lim \frac{1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} =$ .... olduğundan .... = ... elde edilir..

2. (x_n) dizisi $x_1 = 11$ ve $n \geq 1$ için $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}$ olarak tanımlanıyor.

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $3 < x_n$ olduğunu tümavarım ile kanıtlayınız.

   - $n = 1$ ise $x_1 =$ .... olduğundan 3 <................ dır.
   - $n \geq 1$ ve $3 < x_n$ olduğunu varsayalım. $f(x) = \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ monoton artandır.O halde

   $$f(\ldots\ldots\ldots).\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ f(\ldots\ldots\ldots) \Longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots$$

   elde edilir. O halde önerme .... için de doğrudur.

   (b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} < x_n$ olduğunu tümavarım ile kanıtlayınız.

   - $n = 1$ ise $x_1 =$ .... ve $x_2 =$ .... olduğundan .... dır.
   - $n \geq 1$ ve .... olduğunu varsayalım. f fonksiyonu (a) da tanımlanan fonksiyon olduğuna göre

   $$\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots \Longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots \Longrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots\ldots$$

   elde edilir. O halde önerme .... için de doğrudur.

   (c) (x_n) neden yakınsak olacağını söyleyiniz ve $\lim x_n$ yi bulunuz.

   - (x_n) dizisi (b) den dolayı .... ve (a) dan dolayı.. olduğundan ....dır. $\lim x_n = x$ olsun. Bu durumda limit teoremlerinden

   $$x = \lim x_n = \lim \sqrt{2\ldots\ldots + \ldots\ldots} = \sqrt{2\ldots\ldots + \ldots\ldots} \Longrightarrow$$

   $$x^2 - \ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots = 0 \Longrightarrow x = \ldots\ldots\ldots \text{ veya } x = \ldots\ldots\ldots$$

   bulunur. Fakat $n \in \mathbb{N}$ için .... olduğundan .... olur. O halde $\lim x_n =$ .... dir.

3. $x, y, z \in \mathbb{R}$ için $0 < x, y, z$ ve $x + y + z = 1$ ise

   $$36 \leq \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$$

   olduğunu kanıtlayınız.

- $$a_1 = ..., a_2 = ..., a_3 = ...$$

  ve

  $$b_1 = ..., b_2 = ..., b_3 = ...$$

  olarak tanımlayalım. Cauchy-Schwartz eşitsizliği a_1, a_2, a_3 ve b_1, b_2, b_3 için

  $$(................ + ... + ...)^2 \leq (......... + ... + ...)\,(......... + ... + ...)$$

  Şeklindedir. Buradan

  $$(................ + ... + ...)^2 \leq (......... + ... + ...)\,(......... + ... + ...)$$

  bulunur. $x + y + z = 1$ olduğundan

  $$36 \leq \frac{1}{x} + \frac{4}{y} + \frac{9}{z}$$

  elde edilir.

4. (x_n) dizisi

   $$x_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n}$$

   olsun. Örneğin $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$, $x_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9}$ dur.

   (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < 2$ olduğunu kanıtlayınız.

   - $\frac{1}{n+1}, ..., \frac{1}{3n}$ sayıları arasında en .... $\frac{....................}{.................}$dir . $x_n = \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{3n}$ ifadesinde tam .... $-$ (.............) $+ 1 =$ .... sayı vardır. O halde

     $$x_n < \frac{....................}{.................} < ....$$

     olur.

   (b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ olduğunu kanıtlayınız.

   - $x_{n+1} = \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \frac{1}{3n+3}$olduğundan

     $$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{.................} + \frac{1}{.................} + \frac{1}{.................} - \frac{1}{.................}$$

     dir. Fakat $i = 1, 2$ için

     $$\frac{1}{.......... + i} > \frac{1}{.......... + ...}$$

     olduğundan

     $$x_{n+1} - x_n > \frac{3}{.................} - \frac{1}{.................} = 0$$

     elde edilir. O halde $x_n < x_{n+1}$dir.

   (c) (x_n) neden yakınsak olacağını söyleyiniz.

   - (x_n) dizisi (b) den dolayı .... ve (a) dan dolayı..................... olduğundan ....dır.

5. $A, B \subset \mathbb{R}$ için $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ ve her $a \in A \neq \emptyset$, $b \in B \neq \emptyset$ için $a < b$ olsun. $\sup A \in \mathbb{R}$, $\inf B \in \mathbb{R}$ vardır ve $\sup A \leq \inf B$ olduğunu kanıtlayınız.

   - $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olduğundan bir $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ vardır. Verilen hipotez gereğince $a \in A$ ise $a <$ .... olur. O halde A kümesi b_0 ile .... sınırlıdır. Benzer şekilde verilen hipotez gereğince $b \in B$ ise .... $< b$ olur. O halde B kümesi .... ile .... sınırlıdır. $\mathbb{R}$ ....ve $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ olduğundan $\alpha = \sup A \in \mathbb{R}$, $\beta = \inf B \in \mathbb{R}$ vardır. $a \in A$ olsun. Verilen hipotez gereğince $b \in B$ ne olursa olsun $a < b$ olur.O halde B kümesi .... ile .... sınırlıdır. Fakat β, B nın ....dır. O halde $a \leq \beta$ olur. Bu eşitsilik her $a \in A$ için sağlandığından Akümesi .... ile .... sınırlıdır. Fakat α, A nın ....dır. O halde $\alpha \leq \beta$ olur.