MT241 Analiz III, 18 Aralık 2000

Öğrenci No :
Adı Soyadı :

Aşağıda verilen önermelerin bilindiğini varsayarak soruları cevaplayınız. Soruların cevaplarını, her sorunun hemen altında ayrılan yere yazınız. Başka yerlere veya kağıtlara yazılan cevaplar kesinlikle okunmayacaktır. Başarılar.

a) $0 < y$ ise $\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1$ dir.

b) $0 < b \in \mathbb{R}$ ise $\lim n\left(\sqrt[n]{b} - 1\right) = \ln b$ dir.

SORULAR

1. Aşağıdaki limitlerin var olmadığını gösteriniz.

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \ (x \neq 0)$ b) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \ (x \neq 0)$

2. Aşağıda, $x \in (0, \infty)$ için $\lim_{x\to 0} x \ln x = 0$ olduğunu kanıtlayan önermeler dizisndeki boş yerleri doldurunuz.

(a) da $0 < x$ için $y = \sqrt{x}$ alınacak olursa

$$\frac{\ldots\ldots\ldots\ldots - 1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq \ln \sqrt{x} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots - 1$$

olur. .... ile çarparak

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots - 1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots \ln \sqrt{x} \leq \ldots\ldots\ldots\ldots (\ldots\ldots\ldots\ldots - 1) \qquad (*)$$

elde edilir.

$$\lim \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots - 1}{\ldots\ldots\ldots\ldots} = \lim \sqrt{x} (\ldots\ldots\ldots\ldots - 1) = 0 \text{ ve } \lim \ldots\ldots\ldots\ldots (\ldots\ldots\ldots\ldots - 1) = 0$$

olduğundan (*) dan dolayı $\lim_{x\to 0} x \ln \sqrt{x} = 0$ bulunur. $x \in (0, \infty)$ için

$\ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots \ln \sqrt{x}$ olduğuna dikkat ederek

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \lim_{x\to 0} x \ln \sqrt{x} = 0$$

bulunur.

3. Aşağıda, $x, y \in (0, \infty)$ için önce $\lim \sqrt[n]{y} = 1$ olduğunu, daha sonra $\ln xy = \ln x + \ln y$ olduğunu kanıtlayan önermeler dizisindeki boş yerleri doldurunuz.

$n \in \mathbb{N}$ için $y_n = n\left(\sqrt[n]{y} - 1\right)$ koyalım. O zaman

$$\sqrt[n]{y} = 1 + \frac{1}{n} y_n$$

dir. $\lim \frac{1}{n} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ ve $\lim y_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$ olup $\lim \sqrt[n]{y} = 1 + \lim \frac{1}{n} y_n =$

$1 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 1$ dir.

$$n\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) = n\left(\sqrt[n]{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} - 1\right) \sqrt[n]{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} + n\left(\sqrt[n]{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} - 1\right)$$

dir. O halde

$$\ln im\left(\sqrt[n]{xy} - 1\right) = \ln im\left(\sqrt[n]{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} - 1\right) \lim \sqrt[n]{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} + \lim \ln\left(\sqrt[n]{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} - 1\right)$$

olur. Buradan $\ln xy = \ln x + \ln y$ elde edilir. elde edilir.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli ıraksak bir seri ve $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ ise $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{A_n}$ ıraksak olduğunu kanıtlayan önermeler dizisindeki boş yerleri doldurunuz.

$n \in \mathbb{N}$ için $a_{k+1} = A_{k+1} - A_{\ldots\ldots\ldots\ldots}$ dir. O halde

$$\frac{a_{k+1}}{A_k} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots - \ldots\ldots\ldots\ldots}{A_k} = \frac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{A_k} - 1$$

Buradan, (a) dan dolayı

$$\frac{a_{k+1}}{A_k} \geq \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{A_k} - 1 \geq \ln \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{A_k} \qquad (*)$$

bulunur. (*) eşitsizliği $k = 1, ..., n$ için toplanırsa

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k+1}}{A_k} \geq \ln \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots} \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots} \cdots \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots} = \ln \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{A_1} = \ln \ldots\ldots\ldots\ldots - \ln A_1$$

elde edilir. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pozitif terimli ıraksak olup $\lim A_{n+1} = \infty$ dur.

O halde $\lim \ldots\ldots\ldots\ldots = \infty$ olur. Böylece $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{A_n}$ ıraksak olduğu görülür.