

MT 241 Analiz 3 Sorular 4

Cauchy Dizileri

1. (x_n) sınırlı bir dizi ve (y_n) , (x_n) nin yakınsak bir alt dizisi, $\lim y_n = x$ olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a \leq x_n \leq b$ ise $a \leq x \leq b$ olduğunu gösterin.
2. İki Cauchy dizisinin toplamının ve farkının da Cauchy dizisi olduğunu gösterin.
3. * İki Cauchy dizisinin çarpımının da Cauchy dizisi olduğunu gösterin.
4. Bölümü (tanımlı ve) de Cauchy dizisi olan iki Cauchy dizisi bulun.
5. Bölümü (tanımlı ve) de Cauchy dizisi olmayan iki Cauchy dizisi bulun.
6. (x_n) sınırlı bir dizi ve (y_n) , 0 a yakınsayan bir dizi ise $(x_n y_n)$ dizisinin de sifra yakınsadığını gösterin.
7. (x_n) bir Cauchy dizisi ve (y_n) , 0 a yakınsayan bir dizi ise $(x_n y_n)$ dizisinin de sifra yakınsadığını gösterin.
8. (x_n) sınırlı bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x \text{ o.ş. bir } (y_n) \text{ alt dizisi vardır}\}$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $m \leq x_n \leq M$ ise $X \subseteq [m, M]$ olduğunu gösterin.
9. * (x_n) sınırlı bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x \text{ o.ş. bir } (y_n) \text{ alt dizisi vardır}\}$ olsun. $\limsup(x_n) = \sup X$, $\liminf(x_n) = \inf X$ olarak tanımlanır. $\limsup x_n \in X$ ve $\liminf x_n \in X$ olduğunu gösterin.
10. * (x_n) sınırlı bir dizi $X = \{x : \lim y_n = x \text{ o.ş. bir } (y_n) \text{ alt dizisi vardır}\}$ olsun. X in kapalı bir küme olduğunu gösterin.
11. * (x_n) sınırlı bir dizi olsun. Eğer $\liminf x_n = \limsup x_n = x$ ise $\lim x_n = x$ olduğunu gösterin.
12. * $A \subseteq \mathbb{R}$ ve $x \in A'$ (A' : A nın yığılma (=limit) noktalarının kümesi) olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in A$, $x_n \neq x$ ve $\lim x_n = x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisinin var olduğunu gösterin.