MT 132 I. ARA SINAV (14 Nisan 2007) ÇÖZÜMLER

1. (a) $\lim \dfrac{3^n - n}{n^2 + 2^{2n-1}} = \lim \dfrac{(\frac{3}{4})^n - \frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{4^n} - \frac{1}{2}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{4^x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{4^x \ \ln 4} = \frac{1}{+\infty} = 0$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{4^x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{4^x \ \ln 4} = \frac{2}{\ln 4} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{4^x} = \frac{2}{\ln 4} 0 = 0$ olduğundan Fonksiyon Limiti-Dizi Limiti teoreminden $\lim \frac{n}{4^n} = 0$ ve $\lim \frac{n^2}{4^n} = 0$ Geometrik Dizi Teoreminden $\lim (\frac{3}{4})^n = 0$ olduğundan Limit teoreminden

$\lim \dfrac{3^n - n}{n^2 + 2^{2n-1}} = \lim \dfrac{(\frac{3}{4})^n - \frac{n}{4^n}}{\frac{n^2}{4^n} - \frac{1}{2}} = \dfrac{0 - 0}{0 - \frac{1}{2}} = 0$ bulunur.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n \sqrt[3]{n}} (x-2)^n$ kuvvet serisi $x = 2$ için yakınsaktır. $x \neq 2$ için $U_n = \frac{\ln n}{3^n \sqrt[3]{n}} (x-2)^n$ olsun. Oran Testini kullanalım.

$$\lim \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{\ln(n+1)}{3 \ln n} \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} \ |x-2|$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{\ln x} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$ olduğundan $\lim \frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$ ve $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ (yukarıya bakın) olduğundan $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ ve $\lim \sqrt[3]{\frac{n}{n+1}} = \sqrt[3]{1} = 1$ dolayısıyla

$$\lim \left| \frac{U_{n+1}}{U_n} \right| = \frac{|x-2|}{3}$$

bulunur. Oran testinden, bu kuvvvet serisi $|x-2| < 3$ için mutlak yakınsak, $|x-2| > 3$ için ıraksaktır. Aralığın uç noktaları $x = 2 \pm 3 = -1$ ve 5 olur. $x = 5$ için kuvvvet serisi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ şekline gelir.

$$n \geq 3 \text{ için } \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \text{ ve } \sum \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ p\text{-serisi Teoreminden ıraksak}$$

olduğundan, Karşılaştırma Testinden, kuvvet serisi $x = 5$ için ıraksaktır. $x = -1$ için kuvvet serisi $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ şekline gelir.

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \text{ için } f'(x) = \frac{3 - \ln x}{3x^{4/3}}, \ x > e^3 \text{ için } f'(x) < 0$$

olduğundan $[e^3, +\infty)$ aralığında $f(x)$ azalandır. Dolayısıyla $p_n = \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ dizisinin bir kuyruğu azalandır. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} \overset{L'Hospital}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0$ olduğundan $\lim \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}} = 0$ olur. İşaret Değişimli Seri Teoreminden $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt[3]{n}}$ yakınsaktır.

Yakınsaklık Aralığı: $[-1, 5)$

2. (a) Teğetin yatay olması ancak $\alpha = \pi - \theta$ iken olur (α **yarıçaptan teğete** olan yönlü açıdır). $\tan\alpha = \frac{r}{r'}$ olduğundan $\frac{2+\cos\theta}{-\sin\theta} = -\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ olmalıdır. $2\cos\theta = \sin^2\theta - \cos^2\theta = 1 - 2\cos^2\theta$, $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$ dan $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, $\theta = \pm \operatorname{Arccos}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ bulunur.

(b) $a_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{3\cdot 6\cdots(3n)}$ olduğundan $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{3n}$ olur. ve $\lim \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3} < 1$ olduğundan, Oran Testinden, seri yakınsaktır.

3. (a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ olduğundan, Binom Serisinden

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n},\ (|x|<1 \text{ için})$$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ olsun. K. S. T.-T. T. Teoreminden bu kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapı 1 dir ve $|x|<1$ için $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}x^{2n} = f'(x)$ dir. O.D. T. nin bir sonucu gereği, her $x \in (-1,+1)$ için $f(x) = g(x) + C$ olacak şekilde bir $C \in \mathbb{R}$ vardır. $x = 0$ alınırsa $\sinh^{-1}0 = 0$ ve $g(0) = 0$ olduğundan $C = 0$ olduğu bulunur. Dolayısıyla her $x \in (-1,+1)$ için:

$$\sinh^{-1}x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

elde edilir. Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1 dir.

(b) $u = x^2 + 4$ olsun. $u'(x) = 2x$ olduğundan Değişken Değişikliği yapılarak

$$\int x\ \operatorname{Arcsin}(x^2+4)\ dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{Arcsin} u\ du$$

elde edilir. Kısmi İntegrasyon ile

$$\int \operatorname{Arcsin} u\ du = u \operatorname{Arcsin} u - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\ du$$

$$\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\ du \overset{v=1-u^2}{=} -\frac{1}{2}\int v^{-\frac{1}{2}}\ dv = -\sqrt{v} + C = -\sqrt{1-u^2} + C$$

olur.Yerine yazılırsa:

$$\int x\ \operatorname{Arcsin}(x^2+4)\ dx = \frac{1}{2}\left((x^2+4)\operatorname{Arcsin}(x^2+4) + \sqrt{1-(x^2+4)^2}\right) + C$$

4. $x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1)$ şeklinde indirgenemez çarpanlara ayrılır. İntegrandın basit kesirlere ayrışması:

$$\frac{3x+1}{x^4-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$$

şeklindedir. Buradan

$$3x+1 = Ax(x-1)(x+1) + B(x-1)(x+1) + Cx^2(x-1) + Dx^2(x+1)$$

olur. $x=0,\ x=-1,\ x=1$ yazılarak $B=-1, C=1, D=2$ bulunur daha sonra da $A=-3$ bulunur.

$$\int \frac{3x+1}{x^4-x^2}\,dx = -3\int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{1}{x^2}\,dx + \int \frac{1}{x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

$$= -3\ln|x| + \frac{1}{x} + \ln|x+1| + 2\ln|x-1| + C$$

5. (a) $x^2 - x = (x-\frac{1}{2})^2 - (\frac{1}{2})^2,\ u = x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sec\theta$ olsun.
$(x \geq \frac{1}{2}$ varsayıldığında)
$\sqrt{x^2-x} = \frac{1}{2}\tan\theta,\ du = dx = \frac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\ d\theta,\ 2x-1 = \sec\theta$ olur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2-x}}{2x-1}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{2}\tan\theta}{\sec\theta}\ \tfrac{1}{2}\sec\theta\tan\theta\ d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int \tan^2\theta\ d\theta = \frac{1}{4}\int (\sec^2\theta - 1)\ d\theta \\
&= \frac{1}{4}(\tan\theta - \theta) + C = \frac{1}{2}\sqrt{x^2-x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{Arcsec}(2x-1) + C
\end{aligned}$$

(b) $z = \tan\frac{x}{2}$ olsun. $\sin x = \frac{2z}{1+z^2},\ \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx = \frac{2\ dz}{1+z^2}$ olduğundan

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x + 1}\,dx = \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{\frac{2z}{1+z^2} - \frac{1-z^2}{1+z^2} + 1}\,\frac{2\ dz}{1+z^2} = \int \frac{1-z}{z(z^2+1)}\,dz$$

$\frac{1-z}{z(z^2+1)} = \frac{A}{z} + \frac{Bz+C}{z^2+1}$, $1-z = A(z^2+1) + z(Bz+C),\ A=1, B=C=-1$

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x + 1}\,dx &= \int \frac{1}{z}\,dz - \int \frac{z}{z^2+1}\,dz - \int \frac{1}{z^2+1}\,dz \\
&= \ln|z| - \frac{1}{2}\ln(z^2+1) - \mathrm{Arctan}\,z + C \\
&= \ln|\tan\frac{x}{2}| - \frac{1}{2}\ln(1+\tan^2\frac{x}{2}) - \frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$