MT 132 FİNAL SINAVI ÇÖZÜMLER

1. (a) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x + y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y + x = 0$ farkı alınırsa

$3(x^2 - y^2 - x + y) = 3(x - y)(x + y - 1) = 0$
$x = y$ veya $x + y = 1$

$x = y$ ise $3x^2 - x = 0$, $x = y = 0$ veya $x = y = \frac{1}{3}$ K N:(0,0) ve $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$x + y = 1$ ise $3(1 - x)^2 - 2(1 - x) + x = 0$, $3x^2 - 3x + 1 = 0$ gerçel kökü yok

Kritik Noktalar:(0,0) ve $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x - 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 1$ $\Delta = (6x - 2)(6y - 2) - 1$

$\Delta(0, 0) = 3 > 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -2 < 0$ (0,0) da yerel maksimum var.

$\Delta(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = -1 < 0$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ da eyer noktası.

(b) Zincir Kuralından: $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}2t + \dfrac{\partial z}{\partial y}3t^2$ Çarpım Kuralı ile

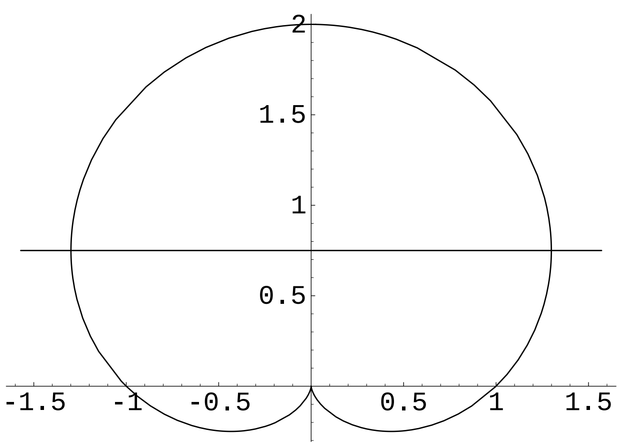
$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{d(\frac{\partial z}{\partial x})}{dt}\ 2t + \frac{\partial z}{\partial x}\ 2 + \frac{d(\frac{\partial z}{\partial y})}{dt}\ 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\ 6t,$$ Tekrar Zincir Kuralı ile:

$$= (\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ 2t + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\ 3t^2)\ 2t + \frac{\partial z}{\partial x}\ 2 + (\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ 2t + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ 3t^2)\ 3t^2 + \frac{\partial z}{\partial y}\ 6t$$

(İkinci Basamaktan Karışık Kısmi Türevlerin Eşitliği Teoreminden $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$)

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\ 4t^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\ 12t^3 + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ 9t^4 + \frac{\partial z}{\partial x}\ 2 + \frac{\partial z}{\partial y}\ 6t$$

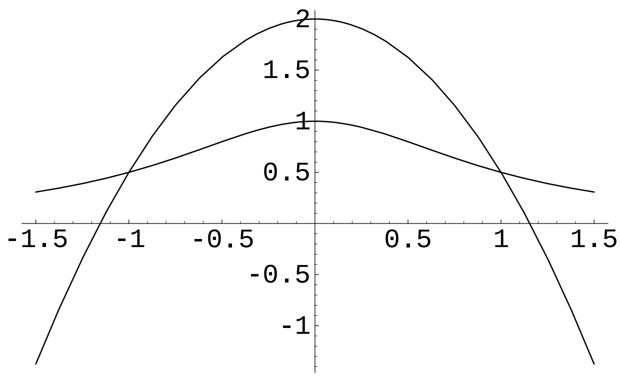
$= 4t^2 z_{xx} + 12t^3 z_{xy} + 9t^4 z_{yy} + 2z_x + 6t z_y$ bulunur.



2. (a) $y = \dfrac{3}{4}$, $y = r\sin\theta \Rightarrow r = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sin\theta} =$
$\dfrac{3}{4}\operatorname{cosec}\theta$ $1 + \sin\theta = \dfrac{\frac{3}{4}}{\sin\theta}$
$\sin\theta + \sin^2\theta = \dfrac{3}{4} \rightarrow \sin\theta = \dfrac{1}{2}$ $(\sin\theta \neq \dfrac{-3}{2}) \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ Kesişme noktaları.

$$\text{Alan}=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(1+\sin\theta)^2-(\frac{3}{4}\operatorname{cosec}\theta)^2\,d\theta=\frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(1+2\sin\theta+\sin^2\theta-\frac{9}{16}\operatorname{cosec}^2\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{3}{2}\theta-2\cos\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta+\frac{9}{16}\cot\theta)\Big|_{\pi/6}^{5\pi/6}=\frac{\pi}{2}+\frac{9\sqrt{3}}{16}$$



(b) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$, $y=2-\dfrac{3x^2}{2}$ Her ikisi de çift fonksiyon olduğundan bölge y-eksenine göre simetriktir. Bu nedenle $\bar{x}=0$ olur.
Kesişme noktaları:$\dfrac{1}{x^2+1}=2-\dfrac{3x^2}{2}\Rightarrow x=\pm 1$ olur.

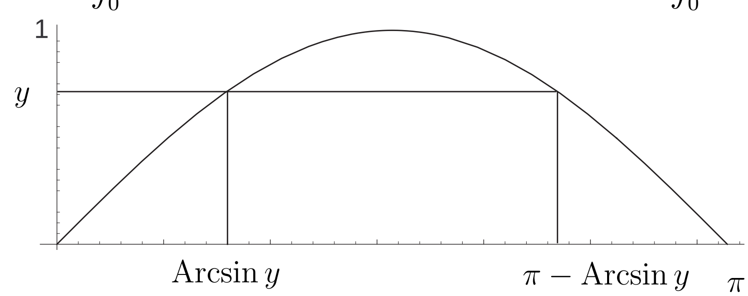
$$\text{Alan}=\int_{-1}^{1}(2-\frac{3x^2}{2}-\frac{1}{x^2+1})\,dx=(2x-\frac{x^3}{2}-\operatorname{Arctan}x)\Big|_{-1}^{1}=3-\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(2-\frac{3x^2}{2})^2-\frac{1}{(x+1)^2}\,dx=\frac{11}{5}-\frac{\pi}{8},\quad \bar{y}=\frac{88-5\pi}{120-20\pi}$$

3. (a) $\text{Yay Uzunluğu}=\displaystyle\int_1^2\sqrt{1+\left(x^2-\frac{1}{4x^2}\right)^2}\,dx=\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{4x^2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{1}{4x}\right)\Big|_1^2=\frac{59}{24}$.

(b) i. $\displaystyle\int_0^{\pi}2\pi x\sin x\,dx=2\pi(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^{\pi}=2\pi^2$ (Silindirik Tabaka)

ii. $\displaystyle\pi\int_0^1((\pi-\operatorname{Arcsin}y)^2-(\operatorname{Arcsin}y)^2)\,dy=\pi^2\int_0^1(\pi-2\operatorname{Arcsin}y)\,dy$ (Disk)



4. (a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n2^{n-1}}(x+1)^n$, $x=-1$ için yakınsaktır. $x\neq -1$ iken $U_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{n2^{n-1}}(x+1)^n$ olsun (Mutlak) Oran Testi ile:

$$\lim\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim\frac{n|x+1|}{2(n+1)} = \frac{|x+1|}{2}$$

olduğundan $|x+1|<2$ için M. Yakınsak, $|x+1|>2$ için ıraksaktır. Uçlar: $1, -3$

$x=-3$ için seri $\sum \frac{-2}{n} = -2\sum\frac{1}{n}$ harmonik seri ıraksaktır. $x=1$ için seri

$\sum \frac{2(-1)^{n-1}}{n} = 2\sum\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ işaret değişimli Harmonik seri olur. $\lim\frac{1}{n}=0$ ve $(\frac{1}{n})$

azalan olduğundan İşaret Değişimli Seri Teoreminden yakınsaktır. Yakınsaklık Aralığı:$(-3,1]$

(b) Kuvvet Serilerinin Terim-Terime Türevlenebilmesi Teoreminden ($-3<x<1$ için)

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(x+1)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{-(x+1))}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1+\frac{x+1}{2}} = \frac{2}{x+3}$$

$f(x) = \int\frac{2}{x+3}\,dx = 2\ln(x+3)+C,\quad f(-1)=0$ olduğundan $,C=-2\ln 2$ olur

$f(x) = 2\ln(x+3)-2\ln 2$ bulunur.

5. (a)

$$\int x\,\text{Arctan}(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x+1) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+(x+1)^2}\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x+1) - \frac{1}{2}\int(1-\frac{2x+2}{1+(x+1)^2})\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\text{Arctan}(x+1) - \frac{1}{2}(x-\ln(x^2+2x+2))+C$$

(b) $x=u^2$ $(u\geq 0)$ olsun. $\sqrt{x}=u,\ 2u\,du = dx$ olur

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{x}}{x-1}\,dx &= \int\frac{u}{u^2-1}2u\,du = 2\int\frac{u^2}{u^2-1}\,du\\ &= 2\int(1+\frac{1}{(u-1)(u+1)}\,du = 2(\int(1+\frac{\frac{1}{2}}{u-1}-\frac{\frac{1}{2}}{u+1})\,du\\ &= 2(u+\frac{1}{2}(\ln|u-1|-ln|u+1|))+C = 2u+\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C\\ &= 2\sqrt{x}+\ln\left|\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}\right|+C\end{aligned}$$

6. (a) $y>0$ bölgesi konveks olduğundan (Konveks Kümelerde Kapalı Formların Tam oluşu Teoreminden)

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y}\,e^{\frac{x}{y}}+y^3\cos(xy^2)+x\right) = \frac{-1}{y^2}\,e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3}\,e^{\frac{x}{y}}+3y^2\cos(xy^2)-2xy^4\sin(xy^2)$$

olacak şekilde bir $R(x,y)$ fonksiyonu bulmak yeterlidir.

$$\begin{aligned} R(x,y) &= \int (\frac{-1}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^3}\ e^{\frac{x}{y}} + 3y^2\cos(xy^2) - 2xy^4\sin(xy^2))\ dx \\ &= \frac{-1}{y}\ e^{\frac{x}{y}} - \frac{x}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + \frac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}} + 2xy^2\cos(xy^2) + \sin(xy^2) + C \\ &= -\frac{x}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + 2xy^2\cos(xy^2) + \sin(xy^2) + C \end{aligned}$$

(C bir sabit) şeklinde olması gerekli ve yeterlidir.

(b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}} + y^3\cos(xy^2) + x$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + 2xy^2\cos(xy^2) + \sin(xy^2)$ olmalı.

$f(x,y) = \displaystyle\int (\frac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}} + y^3\cos(xy^2) + x)\ dx = e^{\frac{x}{y}} + y\sin(xy^2) + \frac{x^2}{2} + \phi(y)$ olmalı.

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + 2xy^2\cos(xy^2) + \sin(xy^2) + \phi'(y) = -\dfrac{x}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + 2xy^2\cos(xy^2) + \sin(xy^2)$

olmasından $\phi'(y) = 0$ ve $\phi(y) = C$ olur.

$f(x,y) = e^{\frac{x}{y}} + y\sin(xy^2) + \dfrac{x^2}{2} + C$ olur.

İkinci yol: $y > 0$ için:

$f(x,y) = \displaystyle\int (\frac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}} + y^3\cos(xy^2) + x)\ dx = e^{\frac{x}{y}} + y\sin(xy^2) + \frac{x^2}{2}$ olsun.

$R(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}\ e^{\frac{x}{y}} + 2xy^2\cos(xy^2) + \sin(xy^2)$ alalım.

$\omega = (\dfrac{1}{y}\ e^{\frac{x}{y}} + y^3\cos(xy^2) + x)\ dx + R(x,y)\ dy = \dfrac{\partial f}{\partial x}\ dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\ dy = df$

olduğundan a) ve b) birlikte gösterilmiş olur.