MT 132 ANALİZ II Final (A) Çözümler

1. $z = \tan\frac{x}{2}$ olsun. $\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx = \int \frac{1}{2+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{2dz}{3+2z+z^2}$,

$3+2z+z^2 = (z+1)^2+2 = 2((\frac{z+1}{\sqrt{2}})^2+1)$ olduğundan

$\int \frac{2dz}{3+2z+z^2} = \int \frac{1}{(\frac{z+1}{\sqrt{2}})^2+1}dz = \sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{(\frac{z+1}{\sqrt{2}})^2+1}dz = \sqrt{2}\int \frac{du}{u^2+1} = \sqrt{2}\,Arc\tan u + C$

$= \sqrt{2}\,Arc\tan(\frac{z+1}{\sqrt{2}})) + C$ olur ve $\int \frac{1}{2+\sin x+\cos x}dx = \sqrt{2}\,Arc\tan(\frac{\tan(\frac{x}{2})+1}{\sqrt{2}}) + C$ bulunur.

2. Kesişme Noktaları: $6-x^2 = x$ $x = -3$, $x = 2$ $B : -3 \le x \le 2, x \le y \le 6-x^2$ (ve $6-x^2, x$ fonksiyonları sürekli) olduğundan $\bar{x} = \frac{\int_{-3}^{2} x(6-x^2-x)dx}{\int_{-3}^{2}(6-x^2-x)dx}$, $\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-3}^{2}(6-x^2)^2-(x)^2dx}{\int_{-3}^{2}(6-x^2-x)dx}$

olur. $\int_{-3}^{2} x(6-x^2-x)dx = \frac{-125}{12}$, $\int_{-3}^{2}(6-x^2)^2-(x)^2dx = \frac{250}{3}$, $\int_{-3}^{2}(6-x^2-x)dx = \frac{125}{6}$ ve $\bar{x} = \frac{-1}{2}, \bar{y} = 4$ bulunur.

3. $f_x = 6x+6y = 6(x+y) = 0$ ve $f_y = 3y^2+6x-9 = 3(y^2+2x-3) = 0$ Kritik Noktalar: $(1,-1)$, $(-3,3)$ bulunur.

$f_{xx} = f_{xy} = f_{yx} = 6, f_{yy} = 6y$ $\Delta(1,-1) = Det\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -72 < 0$ bu nokta bir eyer noktasıdır. $\Delta(-3,3) = Det\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 18 \end{vmatrix} = 72 > 0$ ve $f_{xx}(-3,3) > 0$ olduğundan bu noktada bir yerel minimum vardır.

4. $x^2-4x+13 = (x-2)^2+9$

$f(x) = ((x-2)^2+9)^{\frac{1}{2}} = 3((\frac{x-2}{3})^2+1)^{\frac{1}{2}} = 3(u^2+1)^{\frac{1}{2}} = 3(t+1)^{\frac{1}{2}}$ Binom teoreminden

$(t+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ dir ve bu kuvvet serisi $|t| < 1$ için yakınsak $|t| > 1$ için ıraksaktır. Öyleyse

$f(x) = \sqrt{(x^2-4x+13)} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(\frac{x-2}{3})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{3^{2n-1}}(x-2)^{2n}$ dir

ve bu kuvvet serisi $\left|(\frac{x-2}{3})^2\right| < 1$ için yakınsak $\left|(\frac{x-2}{3})^2\right| > 1$ için ıraksaktır. Buradan yakınsaklık yarıçapı $r = 3$ olarak bulunur.

5. $\frac{x+1}{x^3+36x}$ i basit kesirlere ayrıştıralım. $\frac{x+1}{x^3+36x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+36}$

$x+1 = A(x^2+36)+x(Bx+C)$ den $A = \frac{1}{36}, B = \frac{-1}{36}, C = 1$ bulunur.

$\int \frac{x+1}{x^3+36x}dx = \frac{1}{36}\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{36}\int \frac{x}{x^2+36}dx + \int \frac{1}{x^2+36}dx = \frac{1}{72}\ln\left|\frac{x}{x^2+36}\right| + \frac{1}{6}Arc\tan(\frac{x}{6}) + C$ bulunur.

6.a) x –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi (Disk Yönteminden)

$V = \int_0^1 \pi(Arc\sin x^2)^2dx$ olur. y –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi (Silindirik Tabakalar Yönteminden) $V = \int_0^1 2\pi x Arc\sin x^2 dx$ olur. Disk Yöntemiyle y –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(1^2-(\sqrt{\sin y})^2)\,dy$ olur.

b) (y –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi (Silindirik tabakalar Yönteminden)) $V = \int_0^1 2\pi x Arc\sin x^2dx = \int_0^1 \pi Arc\sin u du$

$\int Arc\sin u du \overset{\text{Kısmi İntegrasyon}}{=} uArc\sin u - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}du = uArc\sin u + \sqrt{1-u^2} + C$ olur.

$\int_0^1 \pi Arc\sin u du = \pi(\frac{\pi}{2} - 1)$

($\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(1^2 - (\sqrt{\sin y})^2)\, dy$ integrali daha kolaydır)

7. $x = 2$ için seri yakınsaktır. $x \neq 2$ için $U_n = \frac{3^n}{\sqrt{n+2}}(x-2)^n$ olsun.

$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{3^{n+1}}{\sqrt{n+3}}|x-2|^{n+1}\frac{\sqrt{n+2}}{3^n|x-2|^n} = 3\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}|x-2|$ olur. $\lim 3\sqrt{\frac{n+2}{n+3}}|x-2| = 3|x-2|$. Oran testinden $3|x-2| < 1$ için seri (mutlak) yakınsak $3|x-2| > 1$ için seri ıraksaktır. $r = \frac{1}{3}$ olur.

$|x-2| = \frac{1}{3} \to x = \frac{5}{3}, \frac{7}{3}$ aralığın uç noktalarıdır.

$x = \frac{7}{3}$ için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ p –serisi dir $p = \frac{1}{2} \leq 1$ olduğundan ıraksaktır.

$x = \frac{5}{3}$ için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ İşaret Değişimli bir seridir.

$p_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}} > \frac{1}{\sqrt{n+3}} = p_{n+1}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\lim p_n = \lim\frac{1}{\sqrt{n+2}} = 0$ olduğundan İşaret Değişimli Seri Teoreminden kuvvet serisi bu uçta yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı: $[\frac{5}{3}, \frac{7}{3})$ olur.

8.a) $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + \frac{1}{x} - 1$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + \frac{1}{x} + y$ ve $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan $P\,dx + Q\,dy$ tam diferansiyel değildir.

b) $R(x,y) = e^x + \ln x - x$ olduğunda $\frac{\partial R}{\partial x} = e^x + \frac{1}{x} - 1 = \frac{\partial P}{\partial y}$ olur ve (en azından konveks kümelerde) $P\,dx + R\,dy$ tam diferansiyel olur.

($f(x,y) = ye^x + y\ln x - xy$ alınırsa $df = P\,dx + R\,dy$ olur)