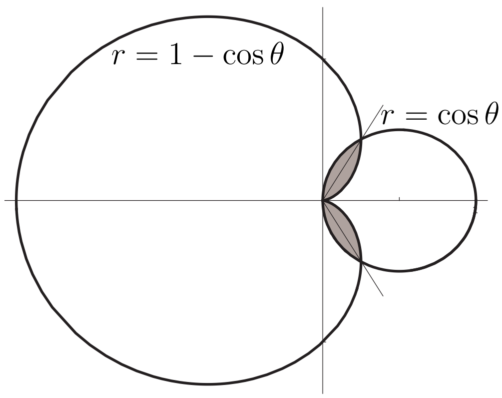
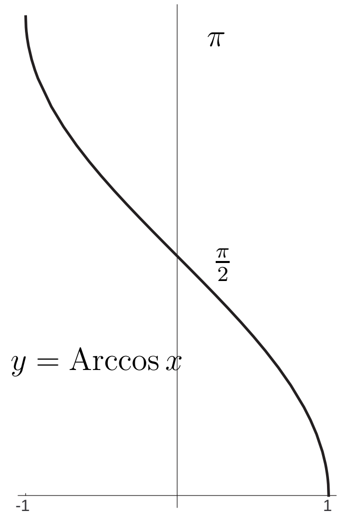
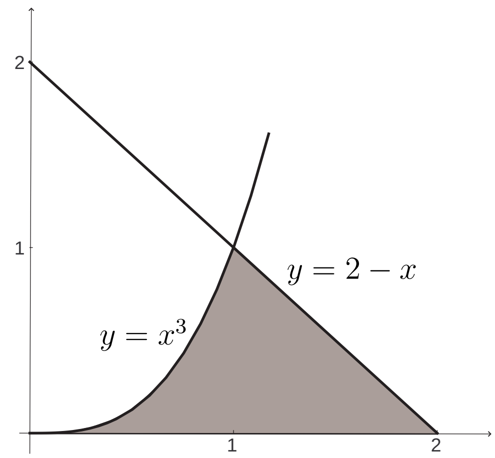


1(a)



2(a)



2(b) ve 3(a)

1. (a) $r = \cos\theta = 1 - \cos\theta \to \cos\theta = \frac{1}{2} \to \theta = \pm\frac{\pi}{3}$ (Ayrıca kutup noktasında kesişirler)

$$Alan = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{2}(1-\cos\theta)^2\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{2}\cos^2\theta\,d\theta \overset{Simetriden}{=} \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos\theta)^2\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\,d\theta$$

(b) $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3n+4}{2n+2},\ \lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{3}{2} > 1$ olduğundan Oran testinden $\sum a_n$ ıraksaktır.

2. (a) $$L = \int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx,$$

$$S = \int_{-1}^{0} 2\pi|x|\sqrt{1+\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx + \int_0^1 2\pi x\sqrt{1+\left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\,dx = \int_{-1}^{1} 2\pi|x|\sqrt{\frac{2-x^2}{1-x^2}}\,dx$$

(veya $x = \cos t,\ y = t,\ 0 \le t \le \pi$ şeklinde parametrize ederek
$L = \int_0^\pi \sqrt{(-\sin t)^2+1}\,dt,\ S = \int_0^\pi 2\pi|\cos t|\sqrt{(-\sin t)^2+1}\,dt$)

(b) $B: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le f(x),\ f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 1 \\ 2-x & x \ge 1 \end{cases}$ (I. Tip) olarak yazılabildiğinden

$$\bar{x} = \frac{\int_0^1 x(x^3)\,dx + \int_1^2 x(2-x)\,dx}{\int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx} = \frac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{52}{45}$$

$$\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\left(\int_0^1 (x^3)^2\,dx + \int_1^2 (2-x)^2\,dx\right)}{\int_0^1 x^3\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{7}+\frac{1}{3})}{\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \frac{20}{63}$$

3. (a) $B: 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le f(x),\ f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 1 \\ 2-x & x \ge 1 \end{cases}$ (I. Tip) veya

$B: 0 \le y \le 1\ \sqrt[3]{y} \le x \le 2-y$ (II. Tip) olarak yazılabildiğinden

i. (Disk) $H = \int_0^1 \pi(x^3)^2\,dx + \int_1^2 \pi(2-x)^2\,dx$ (Sil. Tabaka)$H = \int_0^1 2\pi y((2-y)-\sqrt[3]{y})\,dy$

ii. (Disk) $H = \int_0^1 \pi((2-y)^2 - (\sqrt[3]{y})^2)\,dy$ (Sil. Tabaka)$H = \int_0^1 2\pi x x^3\,dx + \int_1^2 2\pi x(2-x)\,dx$

(b) $\int_k^{2k} f(x)\,dx \overset{t=x-k}{=} \int_0^k f(t+k)\,dt = \int_0^k 3f(t)\,dt = 3\cdot 5 = 15$
$\int_{2k}^{3k} f(x)\,dx \overset{t=x-k}{=} \int_k^{2k} f(t+k)\,dt = \int_k^{2k} 3f(t)\,dt = 3\cdot 15 = 45$
$\int_k^{3k} f(x)\,dx = \int_k^{2k} f(x)\,dx + \int_{2k}^{3k} f(x)\,dx = 15+45 = 60$
(Bu özelliklere sahip yegane fonksiyon $f(x) = \frac{5\ln 3}{2k}3^{\frac{x}{k}}$ dır)

4. (a) Her $x \geq 0$ için $0 \leq \frac{e^{-x}}{1+\sqrt[3]{x}} \leq e^{-x}$ ve ($\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to\infty}(1-e^{-t}) = 1$ olduğu için) $\int_0^\infty e^{-x}\,dx$ yakınsak olduğundan Karşılaştırma Testinden $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ yakınsak olur.

(b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - y = 0$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - x = 0$

$x(2y-1) = 0 \to x = 0$ veya $y = \frac{1}{2}$, $\quad x = 0 \to y = 0$ veya $y = 1$, $\quad y = \frac{1}{2} \to x = \frac{\pm 1}{2\sqrt{3}}$

Kritik Noktalar:$(0,0), (0,1), (\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}), (\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2})$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y - 1$, $\quad \Delta(x,y) = 12x^2 - (2y-1)^2$ olur.

$\Delta(0,0) < 0$ Maksimum veya Minimum yok. Eyer Noktası var

$\Delta(0,1) < 0$ Maksimum veya Minimum yok. Eyer Noktası var

$\Delta(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}) > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}) > 0$ Yerel Minimum var

$\Delta(\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}) > 0$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{-1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}) < 0$ Yerel Maksimum var

5. (a) Böyle bir fonksiyon olsaydı $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{(x-y)^2}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}$ olurdu. Dolayısıyla $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-1}{x^2}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2}{(x-y)^3}$ olurdu. $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ve $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ sürekli fakat eşit olmadıkları için bu durum 2. Basamak Karışık Kısmi Türevlerin Eşitliği Teoremi ile çelişirdi. Öyleyse böyle bir fonksiyon var olamaz.

(b) $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-1}{1+(x-y)^2} - y + x^2$ ve $\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{1+(x-y)^2} - x - e^y$ olduğundan

$$g(x,y) = \int \left(\frac{-1}{1+(x-y)^2} - y + x^2 \right) dx = -\operatorname{Arctan}(x-y) - xy + \frac{1}{3}x^3 + \phi(y)$$

$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{1}{1+(x-y)^2} - x + \phi'(y) = \frac{1}{1+(x-y)^2} - x - e^y$

Buradan:

$\phi'(y) = -e^y$, $\quad \phi(y) = -e^y + C$ olmalıdır. Dolayısıyla:

$g(x,y) = -\operatorname{Arctan}(x-y) - xy + \frac{1}{3}x^3 - e^y + C$ bulunur.