MT 132 FİNAL SINAVI (30 Mayıs 2008)
ÇÖZÜMLER

1. $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}\frac{(-1)^n}{(2n+1)}(x-1)^{2n+1}$ olsun. Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $r=1$ olduğu Oran Testiyle gösterilebilir (bu birazdan da gösterilecektir). K.S.T-T.T. Teoreminden

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n(x-1)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-(x-1)^2)^n$$

olur. Sağ taraftaki ifade, (Binom Teoreminden)

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}t^n,\ |t|<1 \text{ için}$$

eşitliğinde t yerine $-(x-1)^2$ yazılmasıyla elde edilmiştir. (Bu nedenle yakınsaklık yarıçapı 1 dir, dolayısıyla $f(x)$ i tanımlayan kuvvet serisinin de yakınsaklık yarıçapı 1 dir). Buradan $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$, $|x-1|<1$ için olduğu elde edilir. $(0,2)$ aralığında $\frac{d}{dx}f(x)=\frac{d}{dx}\operatorname{Arcsin}(x-1)$ olduğundan $f(x)=\operatorname{Arcsin}(x-1)+C$ olmalıdır. $f(1)=0$ ve $\operatorname{Arcsin}0=0$ olduğundan $C=0$ olmalıdır . Dolayısıyla her $x\in(0,2)$ için $f(x)=\operatorname{Arcsin}(x-1)$ olduğu gösterilmiş olur.

2. (a) Eğrilerin kesim noktaları $1+\cos\theta=\frac{1}{2}$ den $\cos\theta=-\frac{1}{2}$ ve $\theta=\pm\frac{2\pi}{3}$ olarak bulunur. Bu aralıkta $1+\cos\theta\geq\frac{1}{2}\geq 0$ olduğundan

$$\text{Alan}=\frac{1}{2}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2-(\tfrac{1}{2})^2\ d\theta=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}(1+\cos\theta)^2-(\tfrac{1}{2})^2\ d\theta=\frac{7\sqrt{3}}{8}+\frac{5\pi}{6}$$

(b) Eğrilerin kesim noktaları $x=3$ ve $x=4$ bulunur.

$$\bar{x}=\frac{\int_3^4 x(\sqrt{25-x^2}-\frac{12}{x})\ dx}{ALAN},\ \bar{y}=\frac{\frac{1}{2}\int_3^4(\sqrt{25-x^2})^2-(\frac{12}{x})^2\ dx}{ALAN}$$

dan $\bar{x}=\frac{2}{3(24\ln\frac{4}{3}-25\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}+25\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5})}$, $\bar{y}=\frac{2}{3(24\ln\frac{4}{3}-25\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5}+25\operatorname{Arcsin}\frac{3}{5})}$ elde edilir. ($\bar{x}=\bar{y}$ olduğu bölgenin simetrisinden de görülebilir.)

3. (a) Her $x\geq 1$ için $\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}}\geq\frac{1}{x}\geq 0$ dir. $\int_1^t\frac{1}{x}\ dx=\ln t$ ve $\lim_{t\to\infty}\ln t=+\infty$ olduğundan $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$ I. Tip özge integrali ıraksaktır. Karşılaştırma Testinden $\int_1^{\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^5}}\ dx$ I. Tip özge integrali de ıraksaktır.

(b) $\int_1^2\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx$, $\int_2^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx$ sırasıyla II. Tip ve I. Tip özge integrallerdir.
$\int_t^2\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx=\frac{3}{4}3^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}(t^2-1)^{\frac{2}{3}}$, $\lim_{t\to 1^+}\frac{3}{4}3^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}(t^2-1)^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{4}3^{\frac{2}{3}}$ olduğundan $\int_1^2\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx$ yakınsaktır. $\int_2^t\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx=\frac{3}{4}(t^2-1)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}3^{\frac{2}{3}}$ ve $\lim_{t\to\infty}\frac{3}{4}(t^2-1)^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}3^{\frac{2}{3}}=+\infty$ olduğundan $\int_2^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx$ ıraksaktır. Dolayısıyla $\int_1^{\infty}\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}\ dx$ özge integrali ıraksaktır.

4. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2+3y^2-3=0$, ve $\frac{\partial f}{\partial y}=6xy=0$
Kritik noktalar: $(-1,0),(1,0),(0,1),(0,-1)$

$$\Delta=\begin{vmatrix}6x & 6y\\ 6y & 6x\end{vmatrix}=36(x^2-y^2)$$

$(0,1)$ ve $(0,-1)$ de $\Delta<0$ olduğundan eyer noktası,
$(1,0)$ da $\Delta>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0)>0$ olduğundan yerel minimum,
$(-1,0)$ da $\Delta>0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0)<0$ olduğundan yerel maksimum vardır.

(b) Kesişim noktalarında: $x=4x^2$ den $x=0$ ve $x=\frac{1}{4}$ bulunur. Silindirik tabakalar yöntemi ile: ($[0,\frac{1}{4}]$ aralığında $x\geq 4x^2$ olduğundan) Hacim$=\int_0^{\frac{1}{4}}2\pi x(x-4x^2)\ dx=\frac{\pi}{384}$
(Disk Yöntemi ile: Hacim$=\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(\frac{y}{4}-y^2)\ dy=\frac{\pi}{384}$) bulunur.

5. (a) $x^3y^2z + \sin(xyz) = 0$ yüzeyi $f(x,y,z) = x^3y^2z + \sin(xyz)$ fonksiyonunun bir kesit yüzeyidir ve bu fonksiyon, her yerde sürekli türevlere sahip olduğundan, her yerde ∇f yüzeye dik olur.
$\nabla f = (3x^2y^2z + yz\cos(xyz))\vec{i} + (2x^3yz + xz\cos(xyz))\vec{j} + (x^3y^2 + xy\cos(xyz))\vec{k}$ ve $P(1,2,0)$ noktasında $\nabla f_P = 6\vec{k}$ Teğet düzleminin denklemi: $0(x-1) + 0(y-2) + 6(z-0) = 0$ (yani $z = 0$) Normal doğrusu (parametrik şekli):$x = 1,\ y = 2,\ z = t,\ t \in \mathbb{R}$

(b)

$$L = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\theta^2)^2 + (2\theta)^2}\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\theta|\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\sqrt{\theta^2+4}\, d\theta = \frac{2}{3}((4+\frac{\pi^2}{4})^{\frac{3}{2}} - 8)$$

6. (a) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{-4xy^3}{(x^2+y^4)^2}$ ve $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{(x^2+y^2)-(x+y)2y}{(x^2+y^2)^2}$ ve $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olduğundan $M\ dx + N\ dy$ formu kapalı değildir, dolayısıyla tam diferansiyel değildir.

(b) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ olacak şekilde bir $P(x,y)$ fonksiyonu bulalım.
$P(x,y) = \int \frac{-4xy^3}{(x^2+y^4)^2}\ dx = \frac{2y^3}{x^2+y^4}$ alalım. $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$ olduğundan, $\omega = M\ dx + P\ dy$ kapalı bir form ve $x > 0$ kümesi konveks bir bölge olduğundan Konveks Kümelerde Kapalı Formların Tamlığı Teoreminden $\omega = M\ dx + P\ dy$, $x > 0$ bölgesinde Tam Diferansiyeldir.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^4}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{x^2+y^4}$ olacak şekilde bir $f(x,y)$ fonksiyonu bulmalıyız.
$f(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^4}\ dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^4) + \phi(y)$ olmalıdır. $\frac{2y^3}{x^2+y^4} + \phi'(y) = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y^3}{x^2+y^4}$ eşitliğinden $\phi'(y) = 0$ dolayısıyla $\phi(y) = C$ (sabit) bulnur. Öyleyse $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^4) + C$ olmalıdır.