MT 132 FİNAL (4 Haziran 2007) ÇÖZÜMLER

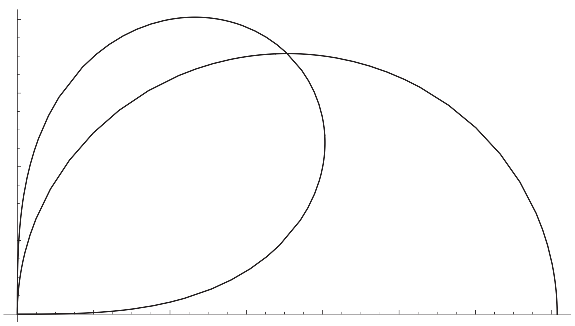
1. $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + xy + yz + xz$ diferansiyellenebilen bir fonksiyon olduğundan ∇f (0 değilse) kesit yüzeylerine dik olacaktır. $\nabla f = (3x^2 + y + z)\overrightarrow{i} + (3y^2 + x + z)\overrightarrow{j} + (3z^2 + x + y)\overrightarrow{k}$ ve $p(1,1,-1)$ noktasında $\nabla f(p) = 3\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j} + 5\overrightarrow{k} \neq 0$ olduğundan $f(x,y,z) = 0$ kesit yüzeyine diktir. Teğet düzlemin denklemi $3(x-1) + 3(y-1) + 5(z+1) = 0$ yani $3x + 3y + 5z = 1$ olur. Normal doğru, ∇f ye paralel olduğundan, denklemi $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+1}{5}$ dir.

2. $x = -1$ için yakınsaktır. $x \neq -1$ için $U_n = \frac{4^n \ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}(x+1)^{2n}$ olsun. Oran Testini kullanalım.

$$\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 4 \lim \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} |x+1|^2 = 4|x+1|^2$$

dan $r = \frac{1}{2}$ bulunur Uçlar:$-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$ $x = -\frac{1}{2}$ için seri $\sum \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$ şekline gelir. $n \geq 2$ için $\frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ olduğundan ve $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ serisi $p = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan p serisi teoreminden ıraksaktır. Karşılaştırma Teoreminden $x = -\frac{1}{2}$ için seri ıraksak olur. $x = -\frac{3}{2}$ için de aynı seri elde edilir. Yakınsaklık aralığı:$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ dir.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 8y = 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 8x = 0$ çözülürse kritik noktalar:$(0,0)$ ve $(-4,2)$, $(4,-2)$ olur. $\Delta(x,y) = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = 48y^2 - 64$ olur. (0,0) da $\Delta = -64 < 0$ Eyer Noktasıdır .$(-4,2)$ ve $(4,-2)$ de $\Delta = 32 > 0$ ve $f_{xx} = 4 > 0$ olduğundan her ikisinde de yerel minimum vardır.



4. Kesişim noktaları $\sqrt{\sin 2\theta} = \sqrt{2}\cos\theta$, $2\sin\theta\cos\theta = 2\cos^2\theta$, $\cos\theta(\sin\theta - \cos\theta) = 0$, $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$
$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ aralığında $\sqrt{\sin 2\theta} \geq \sqrt{2}\cos\theta \geq 0$ olduğundan
Alan=$\displaystyle\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\sin 2\theta})^2 - (\sqrt{2}\cos\theta)^2 \, d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2\theta - 2\cos^2\theta) \, d\theta = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

5. $\sum a_n$ mutlak yakınsak ise $\lim a_n = 0$, dolayısıyla (a_n) dizisi sınırlıdır. Yani Her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ o.ş. bir $M \in \mathbb{R}$ vardır. $0 \leq |a_n^3 + 2a_n| \leq |a_n|^3 + 2|a_n| \leq (M^2 + 2)|a_n|$ ve $\sum |a_n|$ yakınsak olduğundan, Karşılaştırma Testinden, $\sum(a_n^3 + 2a_n)$ mutlak yakınsaktır.

6. Eğrinin $1 \leq x \leq t$ aralığındaki parçasının x-ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel yüzeyin alanı: $\int_1^t 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$ dir. Eğer $\int_1^{\infty} 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$ özge integrali yakınsak ise verilen yüzeyin alanı sonlu, ıraksak ise verilen yüzeyin alanı sonsuz olacaktır. $\int_1^{\infty} \frac{2\pi}{x} \, dx$ I. tip özge integrali

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{2\pi}{x} \, dx = \lim_{t\to\infty} 2\pi \ln t|_1^t = \lim_{t\to\infty} 2\pi \ln t = +\infty$$

olduğundan ıraksaktır. (Her $x \geq 1$ için $\frac{2\pi}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \geq \frac{2\pi}{x}$ olduğundan) Karşılaştırma Testinden $\int_1^{\infty} 2\pi\frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} \, dx$ özge integrali de ıraksaktır. Dolayısıyla dönel yüzey alanı sonsuzdur.

7. $L = \int_0^1 \sqrt{1 + (\sinh x)^2} dx = \int_0^1 \cosh x \, dx = \sinh 1$, $A = \int_0^1 (1 + \cosh x) \, dx = (x + \sinh x)|_0^1 = 1 + \sinh 1$ olur. $A - L = 1$ bulunur.

8. $\overline{x} = \dfrac{\int_0^2 x(2x - x^2) \, dx}{\int_0^2 (2x - x^2) \, dx} = 1$, $\overline{y} = \dfrac{\frac{1}{2}\int_0^2 x^2 - (x^2 - x)^2 \, dx}{\int_0^2 (2x - x^2) \, dx} = \dfrac{3}{5}$, Alan=$\frac{4}{3}$. Ağırlık Merkezinin dönme eksenine ($y = x$ doğrusu) uzaklığı=$\frac{1 - \frac{3}{5}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}$. Pappus teoreminden hacim=$2\pi \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8\sqrt{2}\pi}{15}$

9. (Serinin yakınsaklık yarıçapı $r = 1 > 0$ olduğundan) Kuvvet Serilerinin Terim-Terime Türevlenebilmesi Teoreminden $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(x-1)^{4n+1} = (x-1)\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(x-1)^{4n}$ bulunur. Binom Teoreminden $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n}(x-1)^{4n} = (1+(x-1)^4)^{-\frac{1}{2}}$, ($|x-1| < 1$ için) olduğundan $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^4}}$ bulunur.

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{x-1}{\sqrt{1+(x-1)^4}}dx \stackrel{t=(x-1)^2}{=} \int \frac{1}{2}\frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{2}\int \sec\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \frac{1}{2}\ln|(x-1)^4 + \sqrt{1+(x-1)^4}| + C \end{aligned}$$

$f(1) = 0$ olduğundan $C = 0$ bulunur Dolayısıyla $f(x) = \frac{1}{2}\ln((x-1)^4 + \sqrt{1+(x-1)^4})$ dir.

10. (a) $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{2(x^2-y^2-xy)}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2(y^2-x^2+xy)}{x^2+y^2}$ ($\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{\partial N}{\partial x}$) olduğundan (her Bölgede) $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ olur. Bu kısmi türevler sürekli ama farklı olduklarından $\omega = M\ dx + N\ dy$ (2. Basamak Karışık Kısmi Türevlerin Eşitliği Teroreminden) hiç bir bölgede tam diferansiyel olamaz.

    (b) $P(x,y) = -N(x,y) = \frac{y-2x}{x^2+y^2}$ olsun. $\frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{2(x^2-y^2-xy)}{x^2+y^2} = \frac{\partial M}{\partial y}$ ve $y > 0$ bölgesi konveks olduğundan (Konveks Kümelerde Kapalı Formların Tamlığı Teoreminden) $\omega = M\ dx + P\ dy$ bu bölgede tam diferansiyel olur.

    (c) $f(x,y) = \int \frac{x+2y}{x^2+y^2}dx = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx + \int \frac{2y}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y} + \phi(y)$ olmalıdır.
    $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y-2x}{x^2+y^2} + \phi'(y) = P(x,y)$ eşitliğinden $\phi'(y) = 0$ ve $\phi = C$ olur. Dolayısıyla
    $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + 2\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{y} + C$ olmalıdır.

11. Basit kesirlere ayıralım:

$$\frac{2x-2}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} = \frac{-1}{x+1} + \frac{x}{x^2-x+1}$$

İkinci terimi düzenlersek

$$\frac{x}{x^2-x+1} = \frac{\frac{1}{2}(2x-1)+\frac{1}{2}}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}$$

Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-1}{x^3+1}dx &= \int \frac{-1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{(\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1}dx \\ &= -\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$