MT 132 ANALİZ II (B) Final Çözümler

1. $z = \tan\frac{x}{2}$ olsun. $\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx = \int \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}\frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{z(z+1)}$ Basit kesirlere ayrıştırma: $\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}$ olduğundan $\int \frac{dz}{z(z+1)} = \ln|z| - \ln|z+1| + C$ olur ve $\int \frac{1}{1+\sin x-\cos x}dx = \ln\left|\frac{\tan\frac{x}{2}}{1+\tan\frac{x}{2}}\right| + C$ bulunur.

2. Kesişme Noktaları: $x^2 = 6 - x$ $x = -3$ , $x = 2$ $B: -3 \le x \le 2, x^2 \le y \le 6-x$ (ve $x^2, 6-x$ fonksiyonları sürekli) olduğundan $\bar{x} = \frac{\int_{-3}^{2} x(6-x-x^2)dx}{\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx}$, $\bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_{-3}^{2}(6-x)^2-(x^2)^2dx}{\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx}$ olur. $\int_{-3}^{2} x(6-x-x^2)dx = \frac{-125}{12}$, $\int_{-3}^{2}(6-x)^2-(x^2)^2dx = \frac{500}{3}$, $\int_{-3}^{2}(6-x-x^2)dx = \frac{125}{6}$ ve $\bar{x} = \frac{-1}{2}, \bar{y} = 4$ bulunur.

3. $f_x = 3x^2 + 6y - 9 = 3(x^2 + 2y - 3) = 0$ ve $f_y = 6x + 6y = 6(x+y) = 0$ Kritik Noktalar: $(-1,1)$, $(3,-3)$ bulunur.

$f_{xx} = 6x, f_{xy} = f_{yx} = f_{yy} = 6$ $\Delta(-1,1) = Det\begin{vmatrix} -6 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = -72 < 0$ bu nokta bir eyer noktasıdır. $\Delta(3,-3) = Det\begin{vmatrix} 18 & 6 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 72 > 0$ ve $f_{xx}(3,-3) > 0$ olduğundan bu noktada bir yerel minimum vardır.

4. $x^2 + 6x + 13 = (x+3)^2 + 4$

$f(x) = ((x+3)^2+4)^{\frac{1}{2}} = 2((\frac{x+3}{2})^2+1)^{\frac{1}{2}} = 2(u^2+1)^{\frac{1}{2}} = 2(t+1)^{\frac{1}{2}}$ Binom teoreminden

$(t+1)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}t^n$ dir ve bu kuvvet serisi $|t| < 1$ için yakınsak $|t| > 1$ için ıraksaktır. Öyleyse

$f(x) = \sqrt{(x^2+6x+13)} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(\frac{x+3}{2})^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}\frac{1}{2^{2n-1}}(x+3)^{2n}$ dir

ve bu kuvvet serisi $\left|(\frac{x+3}{2})^2\right| < 1$ için yakınsak $\left|(\frac{x+3}{2})^2\right| > 1$ için ıraksaktır. Buradan yakınsaklık yarıçapı $r = 2$ olarak bulunur.

5. $\frac{x-1}{x^3+25x}$ i basit kesirlere ayrıştıralım. $\frac{x-1}{x^3+25x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+25}$

$x - 1 = A(x^2+25) + x(Bx+C)$ den $A = \frac{-1}{25}, B = \frac{1}{25}, C = 1$ bulunur.

$\int \frac{x-1}{x^3+25x}dx = \frac{-1}{25}\int \frac{1}{x}dx + \frac{1}{25}\int \frac{x}{x^2+25}dx + \int \frac{1}{x^2+25}dx = \frac{1}{50}\ln\left|\frac{x^2+25}{x^2}\right| + \frac{1}{5}Arc\tan(\frac{x}{5}) + C$ bulunur.

6. $x = -1$için seri yakınsaktır. $x \neq -1$ için $U_n = \frac{2^n}{\sqrt[3]{n+3}}(x+1)^n$ olsun.

$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{2^{n+1}}{\sqrt[3]{n+4}}|x+1|^{n+1}\frac{\sqrt[3]{n+3}}{2^n|x+1|^n} = 2\sqrt[3]{\frac{n+4}{n+3}}|x+1|$ olur. $\lim 2\sqrt[3]{\frac{n+4}{n+3}}|x+1| = 2|x+1|$ . Oran testinden $2|x+1| < 1$ için seri (mutlak) yakınsak $2|x+1| > 1$ için seri ıraksaktır. $r = \frac{1}{2}$ olur.

$|x+1| = \frac{1}{2} \to x = \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}$ aralığın uç noktalarıdır.

$x = \frac{-1}{2}$ için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} = \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ $p$ –serisi dir $p = \frac{1}{3} \le 1$ olduğundan ıraksaktır.

$x = \frac{-3}{2}$için kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+3}}$ İşaret Değişimli bir seridir.

$p_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}} = p_{n+1}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\lim p_n = \lim\frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} = 0$ olduğundan İşaret Değişimli Seri Teoreminden kuvvet serisi bu uçta yakınsaktır. Yakınsaklık aralığı:

$[\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2})$ olur.

7.a) $x$ –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi (Disk Yönteminden) $V = \int_0^1 \pi(Arc\sin x^2)^2 dx$ olur. $y$ –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi (Silindirik Tabakalar Yönteminden) $V = \int_0^1 2\pi x Arc\sin x^2 dx$ olur. Disk Yöntemiyle $y$ –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi $V = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(1^2 - (\sqrt{\sin y})^2)\, dy$ olur.

b) ($y$ –ekseni etrafında dönmesi durumunda cismin hacmi (Silindirik tabakalar Yönteminden)) $V = \int_0^1 2\pi x Arc\sin x^2 dx = \int_0^1 \pi Arc\sin u du$

$\int Arc\sin u du \overset{\text{Kısmi İntegrasyon}}{=} uArc\sin u - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} du = uArc\sin u + \sqrt{1-u^2} + C$ olur. $V = \int_0^1 \pi Arc\sin u du = \pi(\frac{\pi}{2} - 1)$

($\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi(1^2 - (\sqrt{\sin y})^2)\, dy$ integrali daha kolaydır)

8. a) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2x}{y^2} - \frac{1}{(x+y)^2} - 2ye^x$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2x}{y^2} - \frac{1}{(x+y)^2} - e^x$ ve $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ olduğundan $P\,dx + Q\,dy$ tam diferansiyel değildir.

b) $R(x,y) = \frac{2x}{y} + \frac{1}{x+y} - ye^x$ olduğunda $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{-2x}{y^2} - \frac{1}{(x+y)^2} - e^x = \frac{\partial Q}{\partial x}$ olur ve (en azından konveks kümelerde) $R\,dx + Q\,dy$ tam diferansiyel olur.

($f(x,y) = \frac{x^2}{y} + \ln(x+y) - ye^x$ alınırsa $df = R\,dx + Q\,dy$ olur)