MT 132 ANALİZ II ARA SINAV 2019 ÇÖZÜMLER

1. (a) $x_1 = 2 < 3$ dür. Bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < 3$ olduğunu varsayalım. $x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} < \sqrt{2 \cdot 3 + 3} = 3$ olur. Tümevarım İlkesinden, Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < 3$ olduğu gösterilmiştir.

(b) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n > 0$ olduğu apaçıktır.
$x_{n+1} - x_n = \sqrt{2x_n + 3} - x_n = \frac{2x_n+3-x_n^2}{\sqrt{2x_n+3}+x_n} = \dfrac{(3 - x_n)(x_n + 1)}{\sqrt{2x_n + 3} + x_n}$ dir.
Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $0 < x_n < 3$ olduğundan, $x_{n+1} - x_n > 0$ eşdeğer olarak $x_{n+1} > x_n$ olur.

(c) Monoton Yakınsaklık Teoreminden, (x_n) dizisi yakınsaktır. $\lim x_n = L$ olsun.
Alt Dizi Teoreminden, $\lim x_{n+1} = L$ olur. Limit Teoremlerinden, $\lim \sqrt{2x_n + 3} = \sqrt{2L + 3}$ olur.
Limitin tek oluşundan, $L = \sqrt{2L + 3}$ olur. Bu denklemin yegane çözümü $L = 3$ dür.

2. (a) $x = -5$ için seri (mutlak) yakınsaktır. $x \neq -5$ iken her $n \in \mathbb{N}$ için
$U_n = \frac{n!3^n}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+1)}\ (x + 5)^{2n} \neq 0$ dir. $U_{n+1} = \frac{(n+1)!3^{n+1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n+3)}\ (x + 5)^{2n+2}$ olduğu için:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3(n + 1)}{2n + 3}\ |x + 5|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{3}{n}}\ |x + 5|^2 = \frac{3}{2}\ |x + 5|^2$$

Oran testinden, $\frac{3}{2}\ |x + 5|^2 < 1$ için seri mutlak yakınsak, $\frac{3}{2}\ |x + 5|^2 > 1$ için ıraksaktır. Bunlar düzenlenirse, $|x+5| < \sqrt{\frac{2}{3}}$ için mutlak yakınsak, $|x+5| > \sqrt{\frac{2}{3}}$ için ıraksak olur. Bu da yakınsaklık yarıçapının $R = \sqrt{\frac{2}{3}}$ olması demektir.

(b) Her $n \in \mathbb{N}^+$ için $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+n}\right| = \frac{1}{n^2+n} \leq \frac{1}{n^2}$ dir. p-serisi teoreminden, $\sum \frac{1}{n^2}$ serisi ($p = 2 > 1$ olduğu için) yakınsaktır. Karşılaştırma Testinden, $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n^2+n}\right|$ serisi yakınsak, yani $\sum \frac{(-1)^n}{n^2+n}$ serisi mutlak yakınsaktır.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 + 8x^3}} = (1 + 8x^3)^{-\frac{1}{4}}$ olduğu için, Binom Teoreminden ($|8x^3| < 1$ için),

$$(1 + 8x^3)^{-\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{n} (8x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{n} 2^{3n}x^{3n}$$

Aynı teoremden, bu kuvvet serisi, $|8x^3| < 1$ için yakınsak, $|8x^3| > 1$ için ıraksaktır. Düzenlenirse, kuvvet serisinin $|x| < \frac{1}{2}$ için yakınsak, $|x| > \frac{1}{2}$ için ıraksak olduğu sonucu çıkar. Bu da yakınsaklık yarıçapının $\frac{1}{2}$ olması demektir. K.S.T-T.T. Teoreminden, $f^{(21)}(0) = 21! \times (x^{21}$ nin katsayısı) dır.
x^{21} terimi, $n = 7$ alarak elde edildiğinden,

$$f^{(21)}(0) = 21!\binom{-\frac{1}{4}}{7} 2^{21} = 21!\frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})\cdots(-\frac{25}{4})}{7!} 2^{21} = -(8 \cdot 9 \cdot 10 \cdots 21) \cdot (5 \cdot 9 \cdot 13 \cdots 25) \cdot 2^7 \text{ bulunur.}$$

4. (a) $9x^6 - y^2 = 16$ denklemi, düzenlendiğinde, $(\frac{3}{4}x^3)^2 - \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ şekline gelir.
$\frac{3}{4}x^3 = \cosh t,\ \frac{y}{4} = \sinh t\ (t \in \mathbb{R})$ şeklinde parametrize edebiliriz ($\cosh t > 0$ dir).
Bu eşitlikler x ve y için çözüldüğünde

$$x = \sqrt[3]{\frac{4\cosh t}{3}},\ y = 4\sinh t\ \ (t \in \mathbb{R}) \text{ bulunur.} \qquad \left(\text{Ya da}\quad x = \sqrt[3]{\frac{4\sec t}{3}},\ y = 4\tan t\ (-\tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{\pi}{2})\right)$$

(b) $r = 1 - \sin\theta$ kardiyoidi için, (α: yarıçaptan teğete olan yönlü açı olmak üzere) $\tan\alpha = \frac{r}{r'} = \frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{-1}{\cos\theta} + \tan\theta$ olur. Yatay teğet var olması için $m = \tan(\theta + \alpha) = \frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha} = 0$ olmalıdır. $\tan\theta + \tan\alpha = \tan\theta + \frac{-1}{\cos\theta} + \tan\theta = 0$ denkleminden $2\sin\theta = 1$ bulunur. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ aralığında bu eşitliği sadece $\theta = \frac{\pi}{6}$ sağlar.

5. (a) $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\sin\theta = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2}$ olur.

$$\int \frac{d\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta} = \int \frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\,\frac{2dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{1+z} = \ln|1+z| + C = \ln|1+\tan\frac{\theta}{2}| + C$$

(b) $\frac{d(2x-x^2)}{dx} = 2-2x$, $2x+1 = -(2-2x)+3$ ve $2x-x^2 = 1-(x-1)^2$ dir

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \int \frac{-(2-2x)}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx + 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = -2\sqrt{2x-x^2} + 3\,\mathrm{Arcsin}(x-1) + C$$

6. (a) $4x^2-9 = (2x)^2-3^2$ dir. $u = 2x = 3\sec\theta \quad (0 \le \theta < \frac{\pi}{2})$ olsun.
($x > \frac{3}{2}$ iken)$\sqrt{4x^2-9} = 3\tan\theta$ ve $2dx = du = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$ olur.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \int \frac{\frac{3}{2}\sec\theta\tan\theta\,d\theta}{3\tan\theta} = \frac{1}{2}\int \sec\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2x}{3}+\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3}\right| + C$$

(b) Kısmi integrasyon ile ($u = \mathrm{Arctan}\,x$, $v' = 1$ alalım. $u' = \frac{1}{x^2+1}$, $v = x$ olur.):

$$\int \mathrm{Arctan}\,x\,dx = \int 1\cdot\mathrm{Arctan}\,x\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = x\,\mathrm{Arctan}\,x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

7. Bölme ile $x^4 = x(x^3-8)+8x$, yani $\frac{x^4}{x^3-8} = x + \frac{8x}{x^3-8}$ olur.
$x^3-8 = (x-2)(x^2+2x+4)$, ve x^2+2x+4 indirgenemez olduğu için, ikinci terim

$$\frac{8x}{x^3-8} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+4} \text{ şeklinde basit kesirlere ayrışır.}$$

Bu, $A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2) = 8x$ (özdeş) olması demektir. $x = 2$ alarak $A = \frac{4}{3}$ daha sonra katsayılar eşitlenerek, $B = -\frac{4}{3}$, $C = \frac{8}{3}$ bulunur. Böylece

$$\int \frac{x^4}{x^3-8}dx = \int x\,dx + \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{4}{3}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{4}{3}\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}dx \quad \text{dir.}$$

Son terimin integralini bulmak için $x-2 = \frac{1}{2}(2x+2)-3$, $\quad$ ($\frac{d(x^2+2x)}{dx} = 2x+2$) şeklinde parçalarız.
$x^2+2x+4 = 3\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right)$ oluşundan

$$\int \frac{x-2}{x^2+2x+4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}dx - \int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+4) - \sqrt{3}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

Tüm bunlar yerine yazılarak:

$$\int \frac{x^4}{x^3-8}\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\ln|x-2| - \frac{2}{3}\ln(x^2+2x+4) + \frac{4}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \quad \text{elde edilir.}$$