MT 132 ANALİZ II ARA SINAV 2018 ÇÖZÜMLER

1. $f(x) = (\sin\frac{1}{x})^{\frac{1}{x}}$ olsun. $[1, +\infty) \subset T(f)$ dir. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ limitinde 0^0 belirsizliği vardır.
$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sin\frac{1}{x}}{x}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\cos\frac{1}{x}}{\sin\frac{1}{x}}}{-x^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t)\left(\frac{t}{\sin t}\right)\cos t = 0\cdot 1\cdot 1 = 0$$

olur. L'Hospital Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\sin\frac{1}{x}}{x} = 0$ olur. Bileşkenin Limiti Teoreminden,
$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$ ve Fonksiyon limiti/Dizi Limiti İlişkisi Teoreminden, $\lim(\sin\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = 1$ elde edilir.

2. $x = 1$ için seri (mutlak) yakınsaktır. $x \neq 1$ için (her $n \in \mathbb{N}$ için)
$U_n = \frac{(3n)!}{(n!)^3}(x-1)^{2n} \neq 0$ ve $U_{n+1} = \frac{(3n+3)!}{((n+1)!)^3}(x-1)^{2n+2}$ olur.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n+1)(3n+2)(3n+3)}{(n+1)^3}|x-1|^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{3(3n+1)(3n+2)}{(n+1)^2}|x-1|^2 = 27|x-1|^2$$

Oran testinden, $27|x-1|^2 < 1$ için seri mutlak yakınsak, $27|x-1|^2 > 1$ için ıraksaktır. Bunlar düzenlenirse, $|x-1| < \frac{1}{3\sqrt{3}}$ için mutlak yakınsak, $|x-1| > \frac{1}{3\sqrt{3}}$ için ıraksak olur. Buradan da yakınsaklık yarıçapı $r = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ olarak bulunur.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-9x^2}} = (1 + (-9x^2))^{-\frac{1}{3}}$ olduğu için, Binom teroeminden,

$$(1 + (-9x^2))^{-\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}(-9x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}(-1)^n 3^{2n}x^{2n}$$

Bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı pozitifdir $(r = \frac{1}{3})$ dir. K.S.T-T.T. Teoreminden,
$f^{(20)}(0) = 20! \times (x^{20}$ nin katsayısı) dır. x^{20} terimi, $n = 10$ alarak elde edildiğinden,

$$f^{(20)}(0) = 20!\binom{-\frac{1}{3}}{10}3^{20} = 20!\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})\cdots(-\frac{28}{3})}{10!}3^{20} = (1\cdot 4\cdot 7\cdots 28)\cdot(11\cdot 12\cdots 20)\cdot 3^{10} \text{ bulunur.}$$

4. (a) $8x^4 + y^6 = 4$ denklemi $(\sqrt{2}\,x^2)^2 + \left(\frac{y^3}{2}\right)^2 = 1$ olduğu için,
$\sqrt{2}\,x^2 = \cos t$, $\frac{y^3}{2} = \sin t$ $(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2})$ olur.
($x > 0$ oluşundan $t \neq \pm\frac{\pi}{2}$ olmalıdır) x ve y için çözüldüğünde

$$x = \sqrt{\frac{\cos t}{\sqrt{2}}}, \quad y = \sqrt[3]{2\sin t} \quad (-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2})$$

(b) $r = \cos(2\theta)$ için $\tan\alpha = \frac{\cos(2\theta)}{-2\sin(2\theta)} = \frac{-1}{2\tan(2\theta)}$ olur. Yatay teğet için $m = \tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha} = 0$ olmalıdır. $\tan\theta + \tan\alpha = \tan\theta + \frac{-1}{2\tan(2\theta)} = 0$ denkleminden ($\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ olduğu için) $\tan^2\theta = \frac{1}{5}$ bulunur. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ olduğundan $\theta = \text{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{5}}$ olmalıdır.

5. (a) $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\cos\theta = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta = \frac{2\,dz}{1+z^2}$ olur.

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta &= \int \frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\,\frac{2\,dz}{1+z^2} = \int \frac{1-z^2}{1+z^2}\,dz = \int \left(-1+\frac{2}{1+z^2}\right)dz \\ &= -z + 2\,\mathrm{Arctan}\,z + C = -\tan\frac{\theta}{2} + \theta + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{6x-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{\sqrt{3^2-(x-3)^2}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-\left(\frac{x-3}{3}\right)^2}}\,dx \quad \left(u=\tfrac{x-3}{3}\right) \\ &= \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \mathrm{Arcsin}\,u + C = \mathrm{Arcsin}\,\frac{x-3}{3} + C\end{aligned}$$

6. $9x^2-6x-15 = (3x-1)^2-4^2$ dir. $u = 3x-1 = 4\sec\theta$ olsun.
$(x>2$ iken$)\sqrt{9x^2-6x-15} = 4\tan\theta$ ve $3dx = du = 4\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $3x = 4\sec\theta+1$ olur.

$$\begin{aligned}\int \frac{3x}{\sqrt{9x^2-6x-15}}\,dx &= \int \frac{4\sec\theta+1}{4\tan\theta}\,\frac{4}{3}\sec\theta\tan\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int(4\sec^2\theta+\sec\theta)\,d\theta \\ &= \frac{1}{3}(4\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|) + C \\ &= \frac{1}{3}\left(\sqrt{9x^2-6x-15} + \ln\left(\frac{3x-1}{4} + \frac{\sqrt{9x^2-6x-15}}{4}\right)\right) + C\end{aligned}$$

7. Basit kesirlere ayrıştırabiliriz ($x^4-16 = (x-2)(x+2)(x^2+4)$ ve x^2+4 indirgenemez olduğundan):

$$\frac{2x+1}{x^4-16} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4} \Leftrightarrow 2x+1 = A(x+2)(x^2+4)+B(x-2)(x^2+4)+(Cx+D)(x-2)(x+2)$$

$x=2$ alarak $A=\frac{5}{32}$, $x=-2$ alarak $B=\frac{3}{32}$, $x=2\,i$ alarak $C=-\frac{1}{4}$, $D=-\frac{1}{8}$ bulunur.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+1}{x^4-16} &= \frac{5}{32}\int\frac{1}{x-2}\,dx + \frac{3}{32}\int\frac{1}{x+2}\,dx - \frac{1}{4}\int\frac{x}{x^2+4}\,dx - \frac{1}{8}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx \\ &= \frac{5}{32}\ln|x-2| + \frac{3}{32}\ln|x+2| - \frac{1}{8}\ln(x^2+4) - \frac{1}{16}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2} + C\end{aligned}$$

$$\left(\int\frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u^2+1} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,u + C = \frac{1}{2}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{2} + C\right)$$