MT 132 ANALİZ II (2016) ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ dizisi veriliyor.

   (a) i. $x_1 = 1 < 3$

   ii. Bir $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < 3$ olduğunu kabul edelim. $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6} < \sqrt{3+6} = 3$ olur.

   Tümevarım ilkesinden, her $n \in \mathbb{N}^+$ için $x_n < 3$ olur.

   (b) $x_{n+1} - x_n = \sqrt{x_n + 6} - x_n = \frac{x_n+6-x_n^2}{\sqrt{x_n+6}+x_n} = \frac{(x_n+2)(3-x_n)}{\sqrt{x_n+6}+x_n}$
   Dizinin tanımından ve (a) dan dolayı $x_n + 2 > 0,\ 3 - x_n > 0,\ \sqrt{x_n+6} + x_n > 0$ olduğundan, (her $n \in \mathbb{N}^+$ için) $x_{n+1} - x_n > 0$ olur. Bu da dizinin (kesin) artan olması demektir.

   (c) Dizi artan ve üstten (3 sayısı ile) sınırlı olduğundan, Monoton Yakınsaklık Teoreminden, yakınsaktır. $\lim x_n = L$ ($L \in \mathbb{R}$) olsun. Alt Dizi (veya Kuyruk) Teoreminden $\lim x_{n+1} = L$ olur. ($x_{n+1} = \sqrt{x_n + 6}$ olduğundan) Dizilerin limitleri ile ilgili teoremlerden, $L = \sqrt{L+6}$ olmalıdır. Bu denklemin tek çözümü $L = 3$ dir.

2. $\sum \dfrac{3^n n!}{(2n)!}\, x^n$ kuvvet serisi, $x = 0$ (merkez) için kuvvet serisi (mutlak) yakınsaktır. $x \neq 0$ için $U_n = \frac{3^n n!}{(2n)!}\, x^n$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $U_n \neq 0$ olur. Oran Testi kullanabiliriz:

$$\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \left|\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(2(n+1))!}\, x^{n+1}}{\frac{3^n n!}{(2n)!}\, x^n}\right| = \frac{3^{n+1}}{3^n}\frac{(n+1)!}{n!}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \frac{3(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}|x| = \frac{3}{2(2n+1)}|x|$$

dir. Her $x \neq 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 0 < 1$ olduğundan kuvvet serimiz (Oran Testinden) her $x \neq 0$ için (mutlak) yakınsaktır. 0 için de (mutlak) yakınsak olduğundan kuvvet serimiz, her $x \in \mathbb{R}$ için (mutlak) yakınsaktır. Dolayısıyla, yakınsaklık yarıçapı $R = \infty$ dir.

3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$ olur. Binom Teoreminden, ($m = -\frac{1}{3} \notin \mathbb{N}$ olduğu için) her $|t| < 1$ için, $(1+t)^{-\frac{1}{3}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n} t^n$ olur. $t = -x^2$ olsun. Her $|x| < 1$ için, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}(-1)^n x^{2n}$ olur. K.S.T-T.T teoreminden, (a_{50}, kuvvet serisinde x^{50} nin katsayısı olmak üzere) $a_{50} = \frac{f^{(50)}(0)}{50!}$ dir. Bu da, $n = 25$ alındığında olur.

$$f^{(50)}(0) = 50!\binom{-\frac{1}{3}}{25}(-1)^{25} = -50!\binom{-\frac{1}{3}}{25} = -\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{1}{3}-1)\cdots(-\frac{1}{3}-24)}{25!}50!$$

4. (a) $9x^6 + y^{10} = 4$ Eğri denklemi $(3x^3)^2 + (y^5)^2 = 2^2$ olduğu için, (Saatin tersi yönü için) $3x^3 = 2\cos t,\ y^5 = 2\sin t,\quad t \in [0, 2\pi]$ şeklinde parametrize edilebilir. Bunlar düzenlenerek

$$x = \sqrt[3]{\frac{2\cos t}{3}},\ y = \sqrt[5]{2\sin t},\quad t \in [0, 2\pi] \quad \text{bulunur}$$

   (b) $r = \cos(2\theta)$ için $\tan\alpha = \frac{\cos(2\theta)}{-2\sin(2\theta)} = \frac{-1}{2\tan(2\theta)}$ olur. Yatay teğet için $m = \tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha} = 0$ olmalıdır. $\tan\theta + \tan\alpha = \tan\theta + \frac{-1}{2\tan(2\theta)} = 0$ denkleminden ($\tan(2\theta) = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$ olduğu için) $\tan^2\theta = \frac{1}{5}$ bulunur. $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ olduğundan $\theta = \operatorname{Arctan}\frac{1}{\sqrt{5}}$ olmalıdır.

5. (a) $1\,dx = dv,\ u = \operatorname{Arctan} x$ alalım. $du = \frac{dx}{x^2+1}$ olur, $v = x$ alabiliriz.

$$\int \operatorname{Arctan} x\,dx = \int \operatorname{Arctan} x \cdot 1\,dx = x\operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx = x\operatorname{Arctan} x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

(b) $z=\tan\frac{\theta}{2}$ olsun. $\cos\theta=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $d\theta=\frac{2\,dz}{1+z^2}$ olur.

$$\begin{aligned}\int\frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta &= \int\frac{\frac{1-z^2}{1+z^2}}{1+\frac{1-z^2}{1+z^2}}\,\frac{2\,dz}{1+z^2}=\int\frac{1-z^2}{1+z^2}\,dz=\int\left(-1+\frac{2}{1+z^2}\right)\,dz\\ &= -z+2\,\mathrm{Arctan}\,z+C=-\tan\frac{\theta}{2}+\theta+C\end{aligned}$$

6. $4x-x^2=4-(x^2-4x+4)=2^2-(x-2)^2$ olduğu için $x-2=2\sin\theta$ $\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ olsun. $\sqrt{4x-x^2}=2\cos\theta$, $dx=2\cos\theta\,d\theta$ olur.

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{\sqrt{4x-x^2}}\,dx &= \int\frac{2\sin\theta+3}{2\cos\theta}\,2\cos\theta\,d\theta=\int 2\sin\theta\,d\theta+\int 3\,d\theta=-2\cos\theta+3\theta+C\\ &= -\sqrt{4x-x^2}+3\,\mathrm{Arcsin}\,\frac{x-2}{2}+C \quad \text{bulunur.}\end{aligned}$$

7. $\dfrac{x+1}{x^4+x^2}$ rasyonel fonksiyonu

$$\frac{x+1}{x^4+x^2}=\frac{x+1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1} \quad \text{şeklinde basit kesirlere ayrışır}$$

$x+1=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+x^2(Cx+D)$ olmalıdır. $x=0$ alalım, $B=1$ bulunur. $x=i$ alındığında $i+1=-(Ci+D)$ eşitliğinden $C=D=-1$ bulunur. Daha sonra da $A=1$ bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned}\int\frac{x+1}{x^4+x^2}\,dx &= \int\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{-x-1}{x^2+1}\right)\,dx=\int\frac{1}{x}\,dx+\int\frac{1}{x^2}\,dx-\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\int\frac{1}{x^2+1}\,dx\\ &= \ln|x|-\frac{1}{x}-\tfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\mathrm{Arctan}\,x+C\end{aligned}$$