MT 132 ANALİZ II ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\left|(-1)^n \dfrac{\cos n}{n^2+n}\right| = \dfrac{|\cos n|}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n^2+n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ ve $\sum \frac{1}{n^2}$ ($p = 2 > 1$ olduğundan, p-serisi teoreminden) yakınsak olduğundan, Karşılaştırma Testinden $\sum (-1)^n \dfrac{\cos n}{n^2+n}$ mutlak yakınsaktır.

(b) $a_n = \dfrac{n - \tan\frac{1}{n}}{3n^2+n-1}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$ olsun. $n > 1$ için $a_n \geq 0$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $b_n > 0$ olur.

$L = \lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim \dfrac{n^2 - n\tan\frac{1}{n}}{3n^2+n-1} = \lim \dfrac{1 - \frac{\tan\frac{1}{n}}{n}}{3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{1 - \frac{\tan 0}{+\infty}}{3+0-0} = \dfrac{1}{3}$,

$0 < L < \infty$ olduğundan, Limit Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ aynı karakterdedir.
$\sum b_n = \sum \frac{1}{n}$ (Harmonik seri) ıraksak olduğundan $\sum a_n$ de ıraksak olur.

2. (a) $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim \left|\dfrac{(-1)^{n+1}\frac{((n+1)!)^3}{(3(n+1))!}}{(-1)^n \frac{(n!)^3}{(3n)!}}\right| = \lim \frac{(n+1)^2}{3(3n+1)(3n+2)} = \frac{1}{27} < 1$ olduğundan (Oran Testinden) $\sum (-1)^n \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ serisi mutlak yakınsaktır.

(b) $\sum \dfrac{4^n\sqrt{n}}{n^2+n-1}(x-1)^{2n}$ $U_n = \dfrac{4^n\sqrt{n}}{n^2+n-1}(x-1)^{2n}$ olsun. ($x \neq 1$ için) $\left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 4\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}\,\dfrac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}|x-1|^2$,

$\lim \left|\dfrac{U_{n+1}}{U_n}\right| = 4|x-1|^2$ Oran Testinden,
kuvvet serisi: $4|x-1|^2 < 1$ iken m. yakınsak, $4|x-1|^2 > 1$ iken ıraksak olur. Dolayısıyla:
kuvvet serisi: $|x-1| < \frac{1}{2}$ iken m. yakınsak, $|x-1| > \frac{1}{2}$ iken ıraksak olur.
Bu da, yakınsaklık yarıçapının $\frac{1}{2}$ olması demektir.

3. (a) $r = 3 + 4\sin\theta = \cos(2\theta)$, $\quad 3 + 4\sin\theta = 1 - 2\sin^2\theta \quad \sin^2\theta + 2\sin\theta + 1 = 0$, $\quad \sin\theta = -1$, $\quad \theta = -\frac{\pi}{2}$ ve $r = 1$ olur.
(Bu nokta dışında bir de kutup noktasında kesişirler)
Her iki eğri için de ($\theta = -\frac{\pi}{2}$ için) $r' = 0$ olur. ($\tan\alpha = \frac{r}{r'}$ olduğundan) Her ikisinin teğeti de yarıçapa dik olur.
(Yarıçap aynı olduğundan) İki eğrinin teğetleri aynı doğrudur, aradaki açı 0 dır.

(b) $(x^2)^2 - (y-1)^2 = 4^2$, $\quad \left(\dfrac{x^2}{4}\right)^2 - \left(\dfrac{y-1}{4}\right)^2 = 1$, $\quad \dfrac{x^2}{4} = \cosh t$, $\dfrac{y-1}{4} = \sinh t$, $t \in \mathbb{R}$
($x > 0$ olduğundan)

$$x = 2\sqrt{\cosh t} \quad y = 4\sinh t + 1 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

4. (a) $t = 2x - 1$ olsun. $\displaystyle\int \sqrt[3]{2x-1}\,(\ln(2x-1))^2\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt[3]{t}\,(\ln t)^2\,dt$ olur.
$u = (\ln t)^2$, $dv = \sqrt[3]{t}\,dt$ alarak (Kısmi İntegrasyon ile)
$\displaystyle\int \sqrt[3]{t}\ (\ln t)^2\ dt = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}\,(\ln t)^2 - \frac{3}{2}\int \sqrt[3]{t}\ \ln t\,dt$ (Kısmi İntegrasyon ile)
$\displaystyle\int \sqrt[3]{t}\ \ln t\,dt = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}\,\ln t - \frac{3}{4}\int \sqrt[3]{t}\,dt = \frac{3}{4}\sqrt[3]{t^4}\,\ln t - \frac{9}{16}\sqrt[3]{t^4} + C$ olur. Bunlar yerine konarak:
$\displaystyle\int \sqrt[3]{2x-1}\ (\ln(2x-1))^2\ dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(2x-1)^4}\,(\ln(2x-1))^2 - \frac{9}{16}\sqrt[3]{(2x-1)^4}\,\ln(2x-1) + \frac{27}{64}\sqrt[3]{(2x-1)^4} + C$

(b) $x^2 + 2x - 8 = (x+1)^2 - 3^2$, $x + 1 = 3\sec\theta$, $0 \leq \theta \leq \pi$ olsun. ($x \geq 2$ varsayarsak)
$\sqrt{x^2+2x-8} = 3\tan\theta$, $\quad dx = 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta$, $\quad x = 3\sec\theta - 1$ olur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+2x-8}+x}{x+1}\,dx &= \int \frac{3\tan\theta + 3\sec\theta - 1}{3\sec\theta} 3\sec\theta\tan\theta\,d\theta \\
&= \int (3\tan^2\theta + 3\sec\theta\tan\theta - \tan\theta)\,d\theta \\
&= \int 3(\sec^2\theta - 1)\,d\theta + 3\int \sec\theta\tan\theta\,d\theta - \int \tan\theta\,d\theta \\
&= 3\tan\theta - 3\theta + 3\sec\theta + \ln|\cos\theta| + C \\
&= \sqrt{x^2+2x-8} - 3\,\mathrm{Arcsec}\,\frac{x+1}{3} + (x+1) - \ln\left|\frac{x+1}{3}\right| + C
\end{aligned}$$

5. $\dfrac{x^5+1}{x^4-16} = x + \dfrac{16x+1}{x^4-16}$ $\dfrac{16x+1}{x^4-16} = \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+4}$

$16x+1 = A(x+2)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x-2)(x+2)$ dan $A = \dfrac{33}{32},\ B = \dfrac{31}{32},\ C = -2,\ D = -\dfrac{1}{8}$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^5+1}{x^4-16}\,dx &= \int x\,dx + \frac{33}{32}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{31}{32}\int \frac{dx}{x+2} - 2\int \frac{x\,dx}{x^2+4} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x^2+4} \\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{33}{32}\ln|x-2| + \frac{31}{32}\ln|x+2| - \ln(x^2+4) - \frac{1}{16}\operatorname{Arctan}\frac{x}{2} + C
\end{aligned}$$