MT 132 Analiz II
ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) $\left(\frac{y^2}{9}\right)^2 - \left(\frac{2x}{9}\right)^2 = 1$ $\frac{y^2}{9} = \cosh t,\ \frac{2x}{9} = \sinh t,\ t \in \mathbb{R}$ olsun.
Yani $y = 3\sqrt{\cosh t},\ x = \frac{2}{3}\sinh t$ olsun. ($\cosh t \geq 1$ olduğundan $y \geq 3$ olur.)

(b) 2 merkezli bir kuvvet serisi olduğundan, $x = 2$ için yakınsaktır. $x \neq 2$ olmak üzere $U_n = \frac{9^n (x-2)^{2n}}{4^n \sqrt[3]{n+2}}$ olsun. $\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{9}{4}\sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}}|x-2|^2$ olur. $\lim \sqrt[3]{\frac{n+2}{n+3}} = \sqrt[3]{\lim \frac{n+2}{n+3}} = \sqrt[3]{\lim \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}} = 1$ olduğundan $\lim \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \frac{9}{4}|x-2|^2$ olur. Oran testinden, kuvvet serisi, $|x-2| < \frac{2}{3}$ için mutlak yakınsak; $|x-2| > \frac{2}{3}$ için ıraksak olur. Uç noktalar: $\frac{8}{3}, \frac{4}{3}$ olur. Her iki uç noktasında da kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}$ şekline gelir. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ olduğundan $p = \frac{1}{3}$ için p-serisi ile aynı karakterdedir. ($p = \frac{1}{3} \leq 1$ olduğundan) p-serisi Teoreminden bu seri ıraksaktır.
Yakınsaklık Aralığı :$(\frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ bulunmuş olur.

2. $x^4+4 = x^4+4x^2-4x^2+4 = (x^2+2)^2-(2x)^2 = (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$ olur. x^2+2x+2 ve x^2-2x+2 gerçel kökü olmayan ikinci derece polinomlardır. Basit Kesirlere ayrışım:

$$\frac{x^2}{x^4+4} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \frac{Cx+D}{x^2-2x+2}$$

$x^2 = (Ax+B)(x^2-2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2)$ olması ancak
$A+C = 0,\ 2(C-A)+2(B+D) = 1,\ 2(D-B)+2(A+C) = 0,\ 2(B+D) = 0$ Buradan $A = -\frac{1}{4},\ C = \frac{1}{4},\ B = D = 0$ bulunur.

$$\frac{x^2}{x^4+4} = \frac{\frac{-1}{4}x}{x^2+2x+2} + \frac{\frac{1}{4}x}{x^2-2x+2}$$

$x = a(2x+2)+b,\ x = c(2x-2)+d$ olsun. $a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{1}{2},\ d = 1$ bulunur.

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) - \operatorname{Arctan}(x+1) + C$$

$$\int \frac{x}{x^2-2x+2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2-2x+2) + \operatorname{Arctan}(x-1) + C$$

$$\int \frac{x^2}{x^4+4}dx = -\frac{1}{8}\ln(x^2+2x+2)+\frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(x+1)+\frac{1}{8}\ln(x^2-2x+2)+\frac{1}{4}\operatorname{Arctan}(x-1)+C$$

3. (a) Binom Teoreminden $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x^4}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} x^{4n},\ |x| < 1$ olur.
$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ olsun K. S. T-T. T. teoreminden $(-1,+1)$ aralığında $g'(x) = f'(x)$ olur. ODT nin bir sonucu olarak $f(x) = g(x) + C$ o. ş bir C sabiti vardır. $f(0) = 1,\ g(0) = 0$ olduğundan $C = 1$, dolayısıyla ($|x| < 1$ için)
$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{n} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}$ olur. K. S. T-T. T. Teoreminin sonucundan (a_9, bu kuvvet serisinde x^9 un katsayısı olmak üzere)
$f^{(9)}(0) = 9!a_9,\ a_9 = \frac{\binom{-\frac{1}{3}}{2}}{9}$ den $f^{(9)}(0) = \frac{2}{9}8!$ olur. (Veya $f^{(9)} = (f')^{(8)}$ oluşundan benzer şekilde bulunur.)

(b) Her $x \in \mathbb{R}$ için $|\sin x| \leq |x|$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq 2^n \sin \frac{1}{3^n} \leq (\frac{2}{3})^n$ olur. $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 = \lim 0$ olduğundan Sandviç teoreminden $\lim 2^n \sin \frac{1}{3^n} = 0$ olur.

4. (a) $5 + 4x - x^2 = 3^2 - (x-2)^2$ olur. $x - 2 = 3\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ olsun. $\sqrt{5+4x-x^2} = 3\cos\theta,\ dx = 3\cos\theta\ d\theta$ olur.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{5+4x-x^2}}\ dx &= \int \frac{(2+3\sin\theta)^2}{3\cos\theta}\ 3\cos\theta d\theta = \int (4 + 12\sin\theta + 9\sin^2\theta)\ d\theta \\
&= 4\theta - 12\cos\theta + \frac{9}{2}\int (1 - \cos 2\theta)\ d\theta = \frac{17}{2}\theta - 12\cos\theta - \frac{9}{4}\sin 2\theta + C \\
&= \frac{17}{2}\,\text{Arcsin}\,\frac{x-2}{3} - 4\sqrt{5+4x-x^2} - \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{5+4x-x^2} + C
\end{aligned}$$

(b) $z = \tan\frac{x}{2}$ olsun. $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2},\ dx = \frac{2dz}{1+z^2}$ olur.

$$\int \frac{1}{5 - 4\cos x}\ dx = \int \frac{2}{1+9z^2}\ dz = \frac{2}{3}\,\text{Arctan}\,3z + C = \frac{2}{3}\,\text{Arctan}(3\tan\frac{x}{2}) + C$$

5. (a) Kısmi İntegrasyon ile, $\displaystyle\int \sinh^{-1} x\ dx = x\sinh^{-1} x - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx$ elde edilir. $u = x^2 + 1$ değişken değişikliği ($u' = 2x$ olur) ile $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \sqrt{1+x^2} + C$ bulunur. $\int \sinh^{-1} x\ dx = x\sinh^{-1} x - \sqrt{1+x^2} + C$ elde edilir.

(b) $\tan\alpha = \frac{r}{r'} = \sqrt{2}\sec\theta + \tan\theta,\ 0 = m = \tan(\alpha+\theta) = \frac{\tan\alpha + \tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta} = \frac{\sqrt{2}\sec\theta + 2\tan\theta}{1 - \tan\alpha\tan\theta}$ olduğundan $\sqrt{2}\sec\theta + 2\tan\theta = 0$ dolayısıyla $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ olmalıdır. $\theta = \frac{-\pi}{4},\ \theta = \frac{-3\pi}{4}$ noktalarında yatay teğete sahiptir. (Aslında bu eğri, $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ noktalarında da yatay teğete sahiptir.)