MT 132 I. Ara Sınav Çözümler

22 Şubat 2009

1. (a) $-1 \leq \sin x \leq 1$, ve $\cos\frac{1}{n} > 0$ olduğundan $\frac{1}{n\cos\frac{1}{n}} \leq a_n \leq \frac{1}{n\cos\frac{1}{n}}$ olur. $\cos x$ $[0,1]$ aralığında kesin azalan olduğu için $0 < \cos 1 \leq \cos\frac{1}{n} < 1$ olur. Dolayısıyla
$$\frac{-1}{n\cos 1} \leq a_n \leq \frac{1}{n\cos 1}$$
$\lim\frac{1}{n} = 0$ olduğundan $\lim \pm\frac{1}{n\cos 1} = 0$ olur Sıkıştırma Teoreminden $\lim a_n = 0$ olur.

   (b) -3 merkezli bir kuvvet serisi olduğundan $x = -3$ için yakınsaktır. $x \neq -3$ için $U_n = \frac{\sin 2^n(x+3)^n}{\sqrt{n}+1}$ olsun.
$$\lim\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim\frac{2(\sqrt{n}+1)|x+3|}{\sqrt{n+1}+1} = 2|x+3|$$
olur. Oran testinden bu kuvvet serisi $|x+3| < \frac{1}{2}$ için mutlak yakınsak ve $|x+3| > \frac{1}{2}$ için ıraksaktır. Uç Noktalar: $x = -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}$ dir. $x = -\frac{5}{2}$ için seri $\sum\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ şekline gelir. $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ olsun. ($a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ olmak üzere) $\lim\frac{a_n}{b_n} = \lim\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1} = 1, 0 < 1 < \infty$ olduğundan Limit Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ ve $\sum b_n$ aynı karakterdedir. p serisi Teoreminden $\sum b_n$ ($p = \frac{1}{2} \leq 1$) ıraksaktır. Bu nedenle $\sum a_n$ de ıraksaktır. $x = -\frac{7}{2}$ için seri $\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ şekline gelir. $p_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ dizisi açıkça azalandır ve $\lim p_n = \lim\frac{1}{\sqrt{n}+1} = 0$ dır. İşaret Değişimli Seri testinden $\sum(-1)^n p_n = \sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$ serisi yakınsaktır. Kuvvet Serisinin Yakınsaklık Aralığı:$[-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2})$ dir.

2. (a) $\tan\alpha = \frac{r}{r'} = \frac{\cos^2\theta}{-2\cos\theta\sin\theta} = \frac{-\cot\theta}{2} = \frac{-1}{2\tan\theta}$ olur.
$$0 = m = \tan\phi = \tan(\theta+\alpha) = \frac{\tan\theta + \tan\alpha}{1 - \tan\theta\tan\alpha}$$
Burada $\tan\theta + \tan\alpha = 0$ olmalıdır. $\tan\theta - \frac{1}{2\tan\theta} = 0$ olur Bu da $\tan^2\theta = \frac{1}{2}$, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. $\theta = \pm\,\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{\sqrt{2}}$ noktalarında yatay teğet vardır.

   (b) $z = \tan\frac{\theta}{2}$ olsun.
$$\int\frac{1}{2+\cos\theta}\,d\theta = \int\frac{2dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{(\frac{z}{\sqrt{3}})^2+1}\frac{1}{\sqrt{3}}\,dz = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{1}{u^2+1}\,du$$
$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}\,u + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Arctan}(\frac{\tan\frac{\theta}{2}}{\sqrt{3}}) + C$$

3. (a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+1}}$ olur. Binom teoreminden:

$$\frac{1}{\sqrt{(x+3)^2+1}} = ((x+3)^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (x+3)^{2n}, \ |x+3| < 1 \text{ için}$$

$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2n+1}$ olsun. K.S.T-T.T.T den bu serinin yakınsaklık yarıçapı 1 dir ve

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (x+3)^{2n}, \ |x+3| < 1 \text{ için}$$

dir. $(-4,-2)$ aralığında $g'(x) = f'(x)$ olduğundan O.D.T. nin bir sonucu olarak bir C sabiti için (her $x \in (-4,-2)$ için) $f(x) = g(x) + C$ olur. $x = -3$ için $f(x) = g(x) = 0$ olduğundan $C = 0$ olur. Dolayısıyla her $x \in (-4,-2)$ için $\text{Arcsin}(x+3) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} \frac{(x+3)^{2n+1}}{2n+1}$ olur.

(b) $u = x^2 - 1$ olsun. $u'(x) = 2x\ dx$ olduğundan: $\int x \,\text{Arcsin}(x^2-1)\, dx = \frac{1}{2} \int \text{Arcsin}\, u\ du$ olur. Kısmi integrasyon ile:

$$\begin{aligned} \int \text{Arcsin}\, u\ du &= u \,\text{Arcsin}\, u - \int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, du \\ &= u \,\text{Arcsin}\, u + \int \frac{dv}{2\sqrt{v}} = u \,\text{Arcsin}\, u + \sqrt{1-u^2} + C \end{aligned}$$

Buradan:

$$\int x \,\text{Arcsin}(x^2-1)\, dx = \frac{1}{2}(x^2-1)\,\text{Arcsin}(x^2-1) + \frac{1}{2}\sqrt{1-(x^2-1)^2} + C$$

4. (a) $x + 3 = \cos t, \ y - 1 = \sqrt{\sin t}, \quad 0 \le t \le \pi$ olsun.
$x = -3 + \cos t, \ y = 1 + \sqrt{\sin t}, \quad 0 \le t \le \pi$

(b) $\frac{x+1}{x^3-1}$ i basit kesirlere ayrıştıralım:

$$\frac{x+1}{x^3-1} = \frac{x+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x + 1 = A(x^2+x+1) + (x-1)(Bx+C)$$

den $A = \frac{2}{3}, \ B = -\frac{2}{3}, \ C = -\frac{1}{3}$ bulunur.

$$\int \frac{x+1}{x^3-1}\, dx = \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-1}\, dx - \frac{1}{3}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\, dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1) + C$$

5. (a) $2x + x^2 - 3 = (x+1)^2 - 2^2$ olduğundan $x + 1 = 2\sec\theta$ olsun. ($x - 1 \ge 2$ ise) $\sqrt{2x+x^2-3} = 2\tan\theta$ olur. $dx = 2\sec\theta\tan\theta\ d\theta$ olur.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{2x+x^2-3}} &= \int \frac{2\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{2\tan\theta} = \int \sec\theta\ d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \ln\left|\frac{x+1}{2} + \frac{\sqrt{2x+x^2-3}}{2}\right| + C \end{aligned}$$

(b) $x > 1$ için $G(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ olsun. $x > 1$ için $\frac{1}{\ln t}$ sürekli olduğundan, D-İ.H.T.T. 2. Şeklinden $G'(x) = \frac{1}{\ln x}$ olur. (D-İ.H.T.T. 1. Şekli veya Belirli integralin özelliklerinden) $F(x) = G(2x+1) - G(x)$ olduğundan:

$$F'(x) = 2G'(2x+1) - G'(x) = \frac{2}{\ln(2x+1)} - \frac{1}{\ln x} = \frac{\ln \frac{x^2}{2x+1}}{\ln(2x+1)\ln x}$$

olur. $F'(x) = 0$ olması ancak $\frac{x^2}{2x+1} = 1$ ile mümkündür. Çözümü: $x = 1+\sqrt{2}$ olur ($x = 1-\sqrt{2} < 1$ dir) ($G(x) = \int_a^x \frac{dt}{\ln t}, 0 < a < 1$ alsaydık $0 < x < 1$ için $G'(x),$ ve $F'(x)$ eskisi gibi olurdu ve $x = 1-\sqrt{2} < 0$ ve $x = 1+\sqrt{2} > 1$ olduğundan hiç bir kritik sayı olmazdı)