MT 132 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

A

1. a)$P_2(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ $f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}, a=8$

$P_2(x)=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2$.

$\sqrt[3]{7}=f(7)\approx P_2(7)=2-\frac{1}{12}-\frac{1}{288}=\frac{551}{288}$

b) $f(7)=P_2(7)+R_2$. $R_2=\frac{f'''(c)}{3!}(7-8)^3=\frac{-5}{81\sqrt[3]{c^8}}, 7<c<8.$ $7^{\frac{8}{3}}<c^{\frac{8}{3}}<8^{\frac{8}{3}}=2^8$.

Hata=$|R_2|=\frac{5}{81\sqrt[3]{c^8}}<\frac{5}{81\bullet 7^{\frac{8}{3}}}$

2.a)$b_n=\frac{1}{n}$ olsun. $\lim\frac{a_n}{b_n}=\lim\frac{n}{n+\ln(n+1)}$, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+\ln(x+1)}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x+1}}=1$ olduğundan $\lim\frac{a_n}{b_n}=1$, Limit Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ ile $\sum b_n$aynı karakterdedir.$\sum b_n=\sum\frac{1}{n}$ Harmonik seri ıraksak olduğundan $\sum a_n=\sum\frac{1}{n+\ln(n+1)}$ de ıraksaktır.

b)$\lim\frac{2^n}{2^n+n^2}$ i bulalım,

$\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x}{2^x+x^2}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x\ln 2}{2^x\ln 2+2x}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(\ln 2)^2}{2^x(\ln 2)^2+2}\overset{L'Hospital}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2^x(\ln 2)^3}{2^x(\ln 2)^3}=1$ olduğundan, $\lim\frac{2^n}{2^n+n^2}=1\neq 0$ olur.n-inci Terim Testinden $\sum\frac{2^n}{2^n+n^2}$ ıraksaktır.

3. Kuvvet serisi -1 merkezli olduğundan $x=-1$ için (mutlak) yakınsaktır.$x\neq -1$ için Mutlak Oran Testi kullanalım.($u_n=\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{2^n n!}(x+1)^n$ için)

$\lim\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)(4n+5)}{2^{n+1}(n+1)!}|x+1|^{n+1}\frac{2^n n!}{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)|x+1|^n}=\lim\frac{4n+5}{2n+2}|x+1|=2|x+1|$.Oran testinden kuvvet serisi $2|x+1|<1$ için mutlak yakınsak,$2|x+1|>1$ için ıraksaktır.$2|x+1|=1$ ise $x=-1\pm\frac{1}{2}=-\frac{1}{2},\frac{-3}{2}$ olur.

$x=-\frac{1}{2}$ ise seri $\sum\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{2^n n!}(\frac{1}{2})^n=\sum\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{4^n n!}=\sum\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{4\bullet 8\bullet\cdots 4n}$ şekline gelir.$\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{4\bullet 8\bullet\cdots 4n}=\frac{5}{4}\frac{9}{8}\cdots\frac{4n+1}{4n}>1$ olduğundan $\lim a_n\neq 0$ olur ve n-inci Terim Testinden seri bu uç noktasında ıraksaktır.

$x=-\frac{3}{2}$ ise seri $\sum\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{2^n n!}(\frac{-1}{2})^n=\sum(-1)^n\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{4^n n!}=\sum(-1)^n\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{4\bullet 8\bullet\cdots 4n}$ şekline gelir. $|a_n|=\frac{1\bullet 5\bullet 9\cdots(4n+1)}{4\bullet 8\bullet\cdots 4n}=\frac{5}{4}\frac{9}{8}\cdots\frac{4n+1}{4n}>1$ olduğundan $\lim|a_n|\neq 0$ olur ve n-inci Terim Testinden seri bu uç noktasında da ıraksaktır.

Yakınsaklık Aralığı:$(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ bulunur.

4. a)α,teğet ile yarıçap arasındaki açı olsun. $\tan\alpha=\frac{r}{r'}=\frac{\sin 2\theta}{2\cos 2\theta}$ oluşundan $\theta=\frac{\pi}{6}$ için $\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$ olur. $\alpha=\phi-\theta$ olduğundan $\phi=\alpha+\theta$ olur Teğetin eğimi $m=\frac{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\alpha}{1-\tan\frac{\pi}{6}\tan\alpha}=\frac{5}{\sqrt{3}}$ bulunur.

b)$u=3^x$ olsun. $du=3^x\ln 3\,dx$ olur.$\int\frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx=\frac{1}{\ln 3}\int\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{1}{\ln 3}Arc\sin u+C=\frac{1}{\ln 3}Arc\sin 3^x+C$

5. a)$x^2+4x+13=(x+2)^2+3^2$ olduğundan $u=x+2=3\tan\theta$ olsun.$\sqrt{x^2+4x+13}=3\sec\theta, x+1=3\tan\theta-1$ ve $dx=3\sec^2\theta$ olur.

$\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+13}}dx=\int\frac{3\tan\theta-1}{3\sec\theta}3\sec^2\theta d\theta=3\int\sec\theta\tan\theta d\theta-\int\sec\theta d\theta=3\sec\theta-\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C$

$=\sqrt{x^2+4x+13}-\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4x+13}}{3}+\frac{x+2}{3}\right|+C$

b)Kısmi İntegrasyon ile: $u=\ln x, v'=\frac{1}{x^2}$ olsun.$u'=\frac{1}{x}, v=\frac{-1}{x}$ olur. $\int udv=uv-\int vdu$ olduğundan $\int\ln x\frac{1}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}-\int\frac{1}{x}(\frac{-1}{x})dx=\frac{-\ln x}{x}+\int\frac{1}{x^2}dx=\frac{-\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$ bulunur.