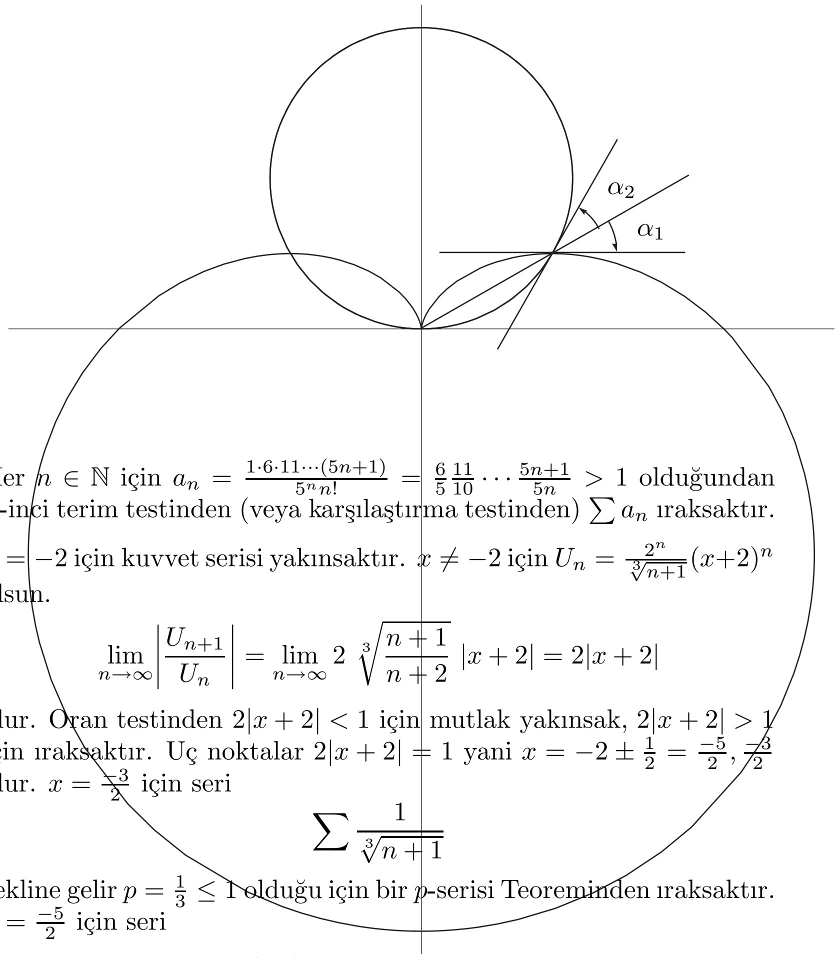
MT 132 (B) Ara Sınav Çözümleri

1. (a) $\sin\theta = 1 - \sin\theta,\ \sin\theta = \frac{1}{2},\ \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\ r = \frac{1}{2}$ Kardiyoid ile çemberin (kutuptan farklı) iki kesişim noktasıdır. Kardiyoid için $\tan\alpha_1 = \frac{r}{r'} = \frac{1-\sin\theta}{-\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur. Çember için $\tan\alpha_2 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Teğetler arasındaki açının tanjantı $\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$ bulunur.



(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1\cdot 6\cdot 11\cdots(5n+1)}{5^n n!} = \frac{6}{5}\frac{11}{10}\cdots\frac{5n+1}{5n} > 1$ olduğundan n-inci terim testinden (veya karşılaştırma testinden) $\sum a_n$ ıraksaktır.

2. (a) $x = -2$ için kuvvet serisi yakınsaktır. $x \neq -2$ için $U_n = \frac{2^n}{\sqrt[3]{n+1}}(x+2)^n$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 2\ \sqrt[3]{\frac{n+1}{n+2}}\ |x+2| = 2|x+2|$$

olur. Oran testinden $2|x+2| < 1$ için mutlak yakınsak, $2|x+2| > 1$ için ıraksaktır. Uç noktalar $2|x+2| = 1$ yani $x = -2 \pm \frac{1}{2} = \frac{-5}{2}, \frac{-3}{2}$ olur. $x = \frac{-3}{2}$ için seri

$$\sum \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

şekline gelir $p = \frac{1}{3} \leq 1$ olduğu için bir p-serisi Teoreminden ıraksaktır. $x = \frac{-5}{2}$ için seri

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n+1}} = \sum (-1)^n \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

şekline gelir. $p_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$ için bir işaret değişimli seridir.i)$\lim p_n = \lim \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = 0$ ve ii)$p_{n+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} = p_n$ olduğundan (p_n) azalandır. İşaret Değişimli seri testinden $x = \frac{-5}{2}$ için kuvvet serisi yakınsaktır. Yakınsaklık Aralığı:$[\frac{-5}{2}, \frac{-3}{2})$

(b) $\lim a_n = \lim \dfrac{2^n + 5^{n+1}}{n + 5^{n-1}} = \lim \dfrac{(\frac{2}{5})^n + 5}{\frac{n}{5^n} + \frac{1}{5}} = \dfrac{0+5}{0+\frac{1}{5}} = 25$ olur. (L'Hospital Kuralından $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{5^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{5^x \ln 5} = 0$ ve Fonksiyon Limiti-Dizi Limiti Teoreminden $\lim \frac{n}{5^n} = 0$ olur.)

3. (a) $f(x) = (1-8x^3)^{1/2} = (1+u)^{1/2}$ $(u = -(2x)^3)$ olduğundan Binom teoreminden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-1)^n 2^{3n} x^{3n}$$

(b) Binom serisi ($m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ olduğundan) $|u| = |-8x^3| < 1$ için yakınsak $|u| = |-8x^3| > 1$ için ıraksak olur. Yakınsaklık yarıçapı $r = \frac{1}{2}$ olur.

(c) (0 merkezli bir) Kuvvet serisi ile tanımlı fonksiyonlarda (a_k, x^k nın katsayısı) $f^{(k)}(0) = k! a_k$ olduğunu biliyoruz. $n = 3$ için x^9 içeren terim elde edilir. x^9 un katsayısı $\binom{1/2}{3}(-1)^3 2^9$ olur. Dolayısıyla $f^{(9)}(0) = -\binom{1/2}{3} 2^9 \cdot 9!$ bulunur.

4. (a) $x^2 + 10x + 29 = (x+5)^2 + 4$ olduğundan indirgenemez 2. derece bir polinomdur. $(x^2 + 10x + 29)' = 2x + 10$, $x = A(2x+10) + B$, $A = \frac{1}{2}$, $B = -5$ olur.

$$\int \frac{x}{x^2+10x+29}\, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+10}{x^2+10x+29}\, dx - \int \frac{5}{x^2+10x+29}\, dx$$

$$\int \frac{2x-8}{x^2+10x+29}\, dx = \ln|x^2+10x+29| + C$$

$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+10x+29} = \int \frac{dx}{(x+5)^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\frac{1}{2}\, dx}{(\frac{x+5}{2})^2 + 1} = \frac{1}{2} \arctan \frac{x+5}{2} + C$. Dolayısıyla

$$\int \frac{x}{x^2+10x+29}\, dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+10x+29| - \frac{5}{2} \arctan \frac{x+5}{2} + C$$

bulunur.

(b) $z = \tan \frac{x}{2}$ olsun. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\, dx = \int \frac{1}{1 - \frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2\, dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{z^2} = \frac{-1}{z} + C = \frac{-1}{\tan \frac{x}{2}} + C = -\cot \frac{x}{2} + C$

5. (a) $x^2 + 8x + 7 = (x+4)^2 - 3^2$ olduğundan $u = x + 4 = 3 \sec\theta$ alalım. $x = 3\sec\theta - 4$ ve ($x + 4 \geq 3$ iken) $\sqrt{x^2+8x+7} = 2\tan\theta$ olur.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+8x+7}}\, dx = \int \frac{3\sec\theta - 4}{3\tan\theta} 3\sec\theta \tan\theta\, d\theta = \int (3\sec^2\theta - 4\sec\theta)\, d\theta$$

$$= 3\tan\theta + 4\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \sqrt{x^2+8x+7} + 3\ln\left|\frac{x+4}{3} + \frac{\sqrt{x^2+8x+7}}{3}\right| + C$$

(b) $(x^2-4)(x^2+1) = (x-2)(x+2)(x^2+1)$ şeklinde indirgenemez polinomların çarpımı olarak yazılır. Basit kesirlere ayrıştıralım.

$$\frac{x+1}{(x^2-4)(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

olur.

$x+1 = A(x+2)(x^2+1) + B(x-2)(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)(x+2)$

$x = 2, x = -2, x = i$ konularak $A = \frac{3}{20}, B = \frac{1}{20}, C = D = -\frac{1}{5}$ bulunur.

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4)(x^2+1)}\,dx = \frac{3}{20}\int \frac{1}{x-2}\,dx + \frac{1}{20}\int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{5}\int \frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{3}{20}\ln|x-2| + \frac{1}{20}\ln(x+2) - \frac{1}{10}\ln(x^2+1) - \frac{1}{5}\arctan x + C$$