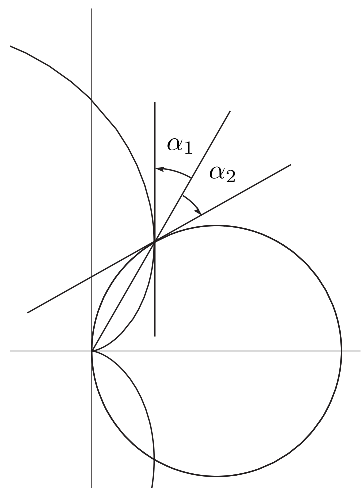
MT 132 (A) Ara Sınav Çözümleri

1. (a) $\cos\theta = 1-\cos\theta,\ \cos\theta = \frac{1}{2},\ \theta = \pm\frac{\pi}{3},\ r = \frac{1}{2}$ Kardiyoid ile çemberin (kutuptan farklı) iki kesişim noktasıdır. Kardiyoid için $\tan\alpha_1 = \frac{r}{r'} = \frac{1-\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ bulunur. Çember için $\tan\alpha_2 = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{-\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Teğetler arasındaki açının tanjantı $\tan(\alpha_1-\alpha_2) = \frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$ bulunur.



(b) Her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n = \frac{1\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)}{4^n(n+1)!} = \frac{5}{4}\frac{9}{8}\cdots\frac{4n+1}{4n}\cdot\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+1}$ ve $\sum\frac{1}{n+1}$ (Harmonik seri) ıraksaktır. Karşılaştırma Testinden $\sum a_n$ de ıraksaktır.

2. (a) $x=-3$ için kuvvet serisi yakınsaktır. $x \neq -3$ için $U_n = \frac{3^n}{\sqrt{n+1}}(x+3)^n$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} 3\sqrt{\frac{n+1}{n+2}}\ |x+3| = 3|x+3|$$

olur. Oran testinden $3|x+3|<1$ için mutlak yakınsak, $3|x+3|>1$ için ıraksaktır. Uç noktalar $3|x+3|=1$ yani $x=-3\pm\frac{1}{3} = \frac{-10}{3}, \frac{-8}{3}$ olur. $x=\frac{-8}{3}$ için seri

$$\sum\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

şekline gelir $p=\frac{1}{2}\le 1$ olduğu için bir p-serisi Teoreminden ıraksaktır. $x=\frac{-10}{3}$ için seri

$$\sum\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

şekline gelir. $p_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ için bir işaret değişimli seridir. i) $\lim p_n = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$ ve ii) $p_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} = p_n$ olduğundan (p_n) azalandır. İşaret Değişimli Seri Testinden $x = \frac{-10}{3}$ için kuvvet serisi yakınsaktır. Yakınsaklık Aralığı: $[\frac{-10}{3}, \frac{-8}{3})$

(b) $\lim a_n = \lim \dfrac{n-7^n}{3^n+7^{n+1}} = \lim \dfrac{\frac{n}{7^n}-1}{(\frac{3}{7})^n+7} = \dfrac{0-1}{0+7} = \dfrac{-1}{7}$ olur. (L'Hospital Kuralından $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{7^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{7^x \ln 7} = 0$ ve Fonksiyon Limiti-Dizi Limiti Teoreminden $\lim \frac{n}{7^n} = 0$ olur.)

3. (a) $f(x) = (1-9x^2)^{1/3} = (1+u)^{1/3}$ $(u = -(3x)^2)$ olduğundan Binom teoreminden

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} u^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/3}{n} (-1)^n 3^{2n} x^{2n}$$

(b) Binom serisi ($m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$ olduğundan) $|u| = |-9x^2| < 1$ için yakınsak $|u| = |-9x^2| > 1$ için ıraksak olur. Yakınsaklık yarıçapı $r = \frac{1}{3}$ olur.

(c) (0 merkezli bir) Kuvvet serisi ile tanımlı fonksiyonlarda (a_k, x^k nın katsayısı) $f^{(k)}(0) = k!a_k$ olduğunu biliyoruz. $n = 5$ için x^{10} içeren terim elde edilir. x^{10} un katsayısı $\binom{1/3}{5}(-1)^5 3^{10}$ olur. Dolayısıyla $f^{(10)}(0) = -\binom{1/3}{5} 3^{10} \cdot 10!$ bulunur.

4. (a) $x^2 - 8x + 25 = (x-4)^2 + 9$ olduğundan indirgenemez 2. derece bir polinomdur. $(x^2-8x+25)' = 2x-8$, $x = A(2x-8)+B$, $A = \frac{1}{2}$, $B = 4$ olur.

$$\int \frac{x}{x^2-8x+25}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-8}{x^2-8x+25}\,dx + \int \frac{4}{x^2-8x+25}\,dx$$

$$\int \frac{2x-8}{x^2-8x+25}\,dx = \ln|x^2-8x+25| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+25} = \int \frac{dx}{(x-4)^2+3^2} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}\,dx}{(\frac{x-4}{3})^2+1} = \frac{1}{3}\arctan\frac{x-4}{3} +$$

C. Dolayısıyla

$$\int \frac{x}{x^2-8x+25}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-8x+25| + \frac{4}{3}\arctan\frac{x-4}{3} + C$$

bulunur.

(b) $z = \tan\frac{x}{2}$ olsun. $\displaystyle\int \frac{1}{1-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}} \frac{2\,dz}{1+z^2} = \int \frac{dz}{z^2} =$

$$\frac{-1}{z} + C = \frac{-1}{\tan\frac{x}{2}} + C = -\cot\frac{x}{2} + C$$

5. (a) $x^2+6x+5=(x+3)^2-2^2$ olduğundan $u=x+3=2\sec\theta$ alalım. $x=2\sec\theta-3$ ve ($x+3\geq 2$ iken) $\sqrt{x^2+6x+5}=2\tan\theta$ olur.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+6x+5}}\,dx=\int \frac{2\sec\theta-3}{2\tan\theta}2\sec\theta\tan\theta\,d\theta=\int(2\sec^2\theta-3\sec\theta)\,d\theta$$

$$=2\tan\theta-3\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C=\sqrt{x^2+6x+5}-3\ln\left|\frac{x+3}{2}+\frac{\sqrt{x^2+6x+5}}{2}\right|+C$$

(b) $(x^2-9)(x^2+1)=(x-3)(x+3)(x^2+1)$ şeklinde indirgenemez polinomların çarpımı olarak yazılır. Basit kesirlere ayrıştıralım.

$$\frac{x+1}{(x^2-9)(x^2+1)}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x+3}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

olur.

$$x+1=A(x+3)(x^2+1)+B(x-3)(x^2+1)+(Cx+D)(x-3)(x+3)$$

$x=3, x=-3, x=i$ konularak $A=\frac{1}{15}, B=\frac{1}{30}, C=D=-\frac{1}{10}$ bulunur.

$$\int\frac{x+1}{(x^2-9)(x^2+1)}\,dx=\frac{1}{15}\int\frac{1}{x-3}\,dx+\frac{1}{30}\int\frac{1}{x+3}\,dx-\frac{1}{10}\int\frac{x}{x^2+1}\,dx-\frac{1}{10}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{15}\ln|x-3|+\frac{1}{30}\ln|x+3|-\frac{1}{20}\ln(x^2+1)-\frac{1}{10}\arctan x+C$$