MT 132 Analiz II Final Sınavı ÇÖZÜMLER

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ özge integrali I. veya II. tip değildir.
$\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (II. Tip) ve $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (I. Tip) olarak parçalayabiliriz. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C$ dir.

$$\lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{3}{2}(1 - t^{\frac{2}{3}}) = 1$$

olduğu için $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (II. Tip) özge integrali yakınsaktır.

$$\lim_{t\to +\infty} \int_1^t \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{3}{2}(t^{\frac{2}{3}} - 1) = +\infty$$

olduğu için $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ (I. Tip) özge integrali ıraksaktır.
I. ya da II. Tip olmayan özge integraller için yakınsaklık tanımından,
$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ özge integrali ıraksaktır.

2. $G(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ olsun. $f(t) = e^{-t^2}$ tüm $\mathbb{R}$ de sürekli olduğu için, (D-İ.H.T.T. II. şeklinden), her $x \in \mathbb{R}$ için, $G'(x) = e^{-x^2}$ dir.
(D-İ.H.T.T. I. şeklinden veya belirli integralin özelliklerinden)
$F(x) = G(3x) - G(x)$ dir. Zincir Kuralından,
$F'(x) = 3G'(3x) - G'(x) = 3e^{-9x^2} - e^{-x^2} = e^{-x^2}(3e^{-8x^2} - 1)$ olur.
Buradan kritik sayılar, $c_1 = -\sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$, , $c_2 = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$ (her ikisinde de türev=0) bulunur.
$F''(x) = -54xe^{-9x^2} + 2xe^{-x^2} = xe^{-x^2}(2 - 54e^{-8x^2})$ olur. $e^{-8c_i^2} = \frac{1}{3}$ olduğundan, $F''(c_1) > 0$, $F''(c_2) < 0$ olur. 2 Türev testinden, F, $c_1 = -\sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$ de yerel minimuma, $c_2 = \sqrt{\frac{\ln 3}{8}}$ de yerel maksimuma erişir.

3. $y = x^2$ ve $x = y^4$ eğrilerinin kesişim noktaları, $x = x^8$ den $x = 0$ ve $x = 1$ olarak bulunur. Arada kalan bölge: $B:\ 0 \le x \le 1,\quad x^2 \le y \le \sqrt[4]{x}$ şeklinde yazılabilir. Burada $[0,1]$ aralığında x^2 ve $\sqrt[4]{x}$ sürekli ve her $x \in [0,1]$ için $\sqrt[4]{x} \ge x^2$ dir. Buna göre

   (a) Alan: $A = \int_0^1 (\sqrt[4]{x} - x^2)\, dx = \left(\frac{4}{5}x^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{7}{15}$ olur.

   (b) y-ekseni etrafında dönmesi ile oluşan cismin hacmi:

      i. Silindirik tabakalar (kabuk) Yöntemi ile:

$$V = 2\pi \int_0^1 x(\sqrt[4]{x} - x^2)\, dx = 2\pi \left(\frac{4}{9}x^{\frac{9}{4}} - \frac{1}{4}x^4\right) = \frac{7\pi}{18}$$

      ii. Disk Yöntemi ile:

$$V = \pi \int_0^1 ((\sqrt{y})^2 - (y^4)^2)\, dy = \pi \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{9}y^9\right) = \frac{7\pi}{18}$$

4. $r = 1 + \sin\theta$ ve $r = 3\sin\theta$ eğrilerinin kesim noktalarını bulmak için, $1 + \sin\theta = 3\sin\theta$ dan, $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$ bulunur. $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}$ aralığında $3\sin\theta \geq 1 + \sin\theta$ olduğundan, kardiyoidin dışında , çemberin içinde kalan noktalar, bu aralıkta θ koordinatına sahiptir. Bölge, (kutupsal koordinatlarda) $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6},\ 1 + \sin\theta \leq r \leq 3\sin\theta$ şeklindedir.

$$\text{Alan:} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \left((3\sin\theta)^2 - (1+\sin\theta)^2\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (3 - 4\cos(2\theta) - 2\sin\theta)\, d\theta$$
$$= \frac{1}{2}(3\theta - 2\sin(2\theta) + 2\cos\theta)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \pi$$

5. $y^2 = x^3$ eğrisinin $1 \leq y \leq 64$ parçasını $x = t^2,\ y = t^3,\ 1 \leq t \leq 4$ şeklinde parametrize edebiliriz.

(a) $$L = \int_1^4 \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_1^4 t\sqrt{4 + 9t^2}\, dt \overset{u=4+9t^2}{=} \frac{1}{18}\int_{13}^{148} \sqrt{u}\, du$$
$$= \frac{1}{27}u^{\frac{3}{2}}\Big|_{13}^{148} = \frac{148^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}}{27}$$

(b) Bu parça için $1 \leq x \leq 16$ ve $y = x^{\frac{3}{2}}$ olduğu için

$$S = \int_1^{16} 2\pi\, x^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \tfrac{9}{4}x}\, dx = \int_1^{16} 2\pi\, x \sqrt{x + \tfrac{9}{4}x^2}\, dx$$

6. $y = \sin x$ eğrisi ile $y = \frac{2}{\pi}x^2$ parabolü $x = 0$ noktasında ve (Ara Değer Teoreminden, $0 < a < \frac{\pi}{2}$ olacak şekilde) bir $x = a$ sayısında kesişir.
(Parabol $y = \frac{4}{\pi^2}x^2$ olsa idi $a = \frac{\pi}{2}$ olurdu)
$[0, a]$ aralığında her iki fonksiyon da sürekli ve $\frac{2}{\pi}x^2 \leq \sin x$ dir.
$B:\ 0 \leq x \leq a,\ \frac{2}{\pi}x^2 \leq y \leq \sin x$ dir. Öyleyse:

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a x(\sin x - \frac{2}{\pi}x^2)\, dx}{\int_0^a (\sin x - \frac{2}{\pi}x^2)\, dx}, \quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^a ((\sin x)^2 - (\frac{2}{\pi}x^2)^2)\, dx}{\int_0^a (\sin x - \frac{2}{\pi}x^2)\, dx}$$

$$\int_0^a \left(\sin x - \tfrac{2}{\pi}x^2\right) dx = \left(-\cos x - \tfrac{2}{3\pi}x^3\right)\Big|_0^a = -\cos a - \tfrac{2}{3\pi}a^3 + 1$$

$$\int_0^a x\left(\sin x - \tfrac{2}{\pi}x^2\right) dx = \left(\sin x - \tfrac{x^4}{2\pi} - x\cos x\right)\Big|_0^a = \sin a - \tfrac{a^4}{2\pi} - a\cos a$$

$$\text{Böylece} \quad \bar{x} = \frac{\sin a - \frac{a^4}{2\pi} - a\cos a}{1 - \cos a - \frac{2}{3\pi}a^3} \quad \text{olur}$$

7. Her h, k için $f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + hG_1(h,k) + kG_2(h,k)$ olacak şekilde A, B sayıları ve ($\lim_{(h,k)\to(0,0)} G_i(h,k) = 0$ $(i = 1,2)$ olacak şekilde) G_1, G_2 fonksiyonları vardır. Her iki tarafın karesi alınırsa:

$$(f(a+h, b+k))^2 = (f(a,b))^2 + (2Af(a,b))h + (2Bf(a,b))k + hH_1(h,k) + kH_2(h,k) \text{(Burada)}$$

$$H_1(h,k) = hG_1(h,k)^2 + A^2h + 2AhG_1(h,k) + \cdots$$

$$H_2(h,k) = kG_2(h,k)^2 + B^2k + 2BhG_1(h,k) + \cdots$$

olur.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} H_i(h,k) = 0 \ (i = 1,2)$$

olduğu için, $(f(x,y))^2$, (a,b) noktasında diferansiyellenebilirdir.

8. $f(x,y) = x^2y - x^2 - 2xy + 2x - y^2$ fonksiyonunun kritik noktaları:

$$f_x = 2xy - 2x - 2y + 2 = 2(x-1)(y-1) = 0, \quad f_y = x^2 - 2x - 2y = 0$$

Birinci denklemden $x = 1$ veya $y = 1$ olmalıdır.
$x = 1$ ise (ikinci denklemden) $y = -\frac{1}{2}$ bulunur
$y = 1$ ise (ikinci denklemden) $x = 1 \pm \sqrt{3}$ bulunur.

$$f_{xx} = 2y - 2, \ f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2, \ f_{yy} = -2 \text{ olur. Hepsi süreklidir.}$$

$\Delta(1, -\frac{1}{2}) = \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 6 > 0$, $f_{xx}(1, -\frac{1}{2}) = -3 < 0$ olduğu için $(1, -\frac{1}{2})$ de yerel maksimum vardır.

$\Delta(1\pm\sqrt{3}, 1) = \begin{vmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{3} \\ \pm 2\sqrt{3} & -2 \end{vmatrix} = -12 < 0$ olduğu için $(1\pm\sqrt{3}, 1)$ de eyer noktası vardır.

9. $df = \left(2xye^{x^2y} + \cos y + \dfrac{1}{1+x^2}\right) dx + \left(x^2e^{x^2y} - x\sin y + y\right) dy$ olması için

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xye^{x^2y} + \cos y + \frac{1}{1+x^2} \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y} - x\sin y + y$$

olması gerekli ve yeterlidir. Birinci eşitlikten:

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int \left(2xye^{x^2y} + \cos y + \frac{1}{1+x^2}\right) dx = e^{x^2y} + x\cos y + \operatorname{Arctan} x + \phi(y)$$

olmalıdır. Bu fonksiyonun y değişkenine göre kısmi türevi alınırsa:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2e^{x^2y} - x\sin y + \phi'(y) \text{ bulunur}$$

Bu kısmi türev, $x^2e^{x^2y} - x\sin y + y$ ye eşit olmalıdır. Bu da ancak $\phi'(y) = y$ olması durumunda mümkündür. Öyleyse, $\phi(y) = \frac{1}{2}y^2 + C$ şeklinde olmalıdır. Bu da

$$f(x,y) = e^{x^2y} + x\cos y + \operatorname{Arctan} x + \tfrac{1}{2}y^2 + C \text{ olması demektir.}$$