Çok Değişkenli Fonksiyonlarda Diferansiyellenebilme için bir YETER Koşul

Çok değişkenli fonksiyonlar için diferansiyellenebilme şöyle tanımlanır:

f, bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktası merkezli bir yuvarda tanımlı (n değişkenli) bir fonksiyon olsun.
Eğer bazı A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sayıları ve $\lim\limits_{(h_1,\ldots,h_n)\to(0,\ldots,0)} G_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ olacak şekilde
(n değişkenli) G_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ fonksiyonları için
$f(a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)+\sum_{i=1}^{n} A_i h_i+\sum_{i=1}^{n} h_i G_i(h_1, \ldots, h_n)$ oluyor ise f fonksiyonu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

Bu tanımdaki koşulun sağlandığını göstermek genellikle uzun ve zor bir işlemdir. Çok değişkenli fonksiyonların diferansiyellenebilir olduğunu göstermek için genellikle aşağıdaki teoremden yararlanılır.

Teorem: n değişkenli bir f fonksiyonu, bir $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktası merkezli bir yuvarda tanımlı, bu yuvarın her noktasında (tüm değişkenlere göre) kısmi türevlere sahip ve bu kısmi türevler $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktasında sürekli ise f, $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ noktasında diferansiyellenebilirdir.

Bu teoremi $n = 2$ durumu için ispatlayacağız. $n > 2$ iken de ispat benzerdir. $n = 1$ için böyle bir teoreme gerek yoktur, (**bir değişkenli**) türevlenebilen her fonksiyon diferansiyellenebilirdir.

İspatımızda, yazma kolaylığı bakımından, a_1, a_2 yerine a, b; A_1, A_2 yerine A, B; h_1, h_2 yerine h, k kullanacağız. Bu semboller ile 2 değişkenli bir f fonksiyonu için bir (a, b) noktasında diferansiyellebilme tanımı şu hale gelir:

f, bir (a, b) noktası merkezli bir dairede tanımlı, iki değişkenli bir fonksiyon olsun.
Eğer bir çift A, B sayıları ve $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} G_i(h, k) = 0$ $(i = 1, 2)$ olacak şekilde (2 değişkenli) G_i $(i = 1, 2)$ fonksiyonları için (her h, k için)

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + Ah + Bk + hG_1(h, k) + kG_2(h, k)$$

oluyor ise, f fonksiyonu (a, b) noktasında diferansiyellenebilirdir denir.

İspat: $f(x, y)$ fonksiyonu (a, b) merkezli r yarıçaplı $(r > 0)$ yarıçaplı bir dairede tanımlı ve bu dairenin her noktasında hem x hem y değişkenine göre kısmi türevlere sahip ve $\frac{\partial f}{\partial x}$ ve $\frac{\partial f}{\partial y}$ fonksiyonları (a, b) noktasında sürekli olsunlar. $h^2 + k^2 < r^2$ olacak şekilde h, k sayıları alalım. Bu durumda, (a, b), $(a + h, b)$ ve $(a + h, b + k)$ noktaları ve bu noktaları birleştiren doğru parçaları da aynı dairenin içinde kalır.

$g_1(x) = f(x, b)$ olarak tanımlayalım. $g_1'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, b)$ olduğu tanımlarından aşikardır.
Bir değişkenli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoreminden, $g_1(a + h) - g_1(a) = hg_1'(c)$ olacak şekilde, ($h \neq 0$ ise a ile $a + h$ arasında, $h = 0$ ise $c = a$) bir c sayısı vardır.
(c sayısı h ye bağlıdır ve $|c - a| \leq |h|$ dir.)

$g_2(y) = f(a+h, y)$ olsun. Öncekine benzer şekilde $g_2'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h, y)$ olduğu tanımlarından aşikardır.
Yine bir değişkenli fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoreminden, $g_2(b+k)-g_2(b) = kg_2'(d)$ olacak şekilde, ($k \neq 0$ ise b ile $b + k$ arasında, $k = 0$ ise $d = b$) bir d sayısı vardır.
(d sayısı, h ve k ya bağlıdır ve $|d - b| \leq |k|$ dir.)

$A = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$, $B = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ olmak üzere:

$$\begin{aligned}
f(a + h, b + k) - f(a, b) &= (f(a + h, b + k) - f(a + h, b)) + (f(a + h, b) - f(a, b)) \\
&= (g_2(b + k) - g_2(b)) + (g_1(a + h) - g_1(a)) = hg_1'(c) + kg_2'(d) \\
&= h\frac{\partial f}{\partial x}(c, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, d) \\
&= hA + kB + h\left(\frac{\partial f}{\partial x}(c, b) - A\right) + k\left(\frac{\partial f}{\partial y}(a + h, d) - B\right)
\end{aligned}$$

olur. $G_1(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(c,b) - A$ ve $G_2(h,k) = \frac{\partial f}{\partial y}(a+h,d) - B$ olarak tanımlayalım.
Yukarıdaki eşitlikten ($h^2 + k^2 < r^2$ olacak şekilde her h, k için):

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + Ah + Bk + hG_1(h,k) + kG_2(h,k) \quad \text{olur.}$$

$\frac{\partial f}{\partial x}$, (a,b) merkezli bir dairede tanımlı ve (a,b) noktasında sürekli olduğundan,
($|c-a| \leq |h|$ olduğunu kullanarak)
$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(c,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = A$ olur. Böylece:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} G_1(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c,b) - A \right) = A - A = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

$\frac{\partial f}{\partial y}$, (a,b) merkezli bir dairede tanımlı ve (a,b) noktasında sürekli olduğundan,
($|d-b| \leq |k|$ olduğunu kullanarak)
$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(a+h,d) = \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = B$ olur. Böylece:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} G_2(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,d) - B \right) = B - B = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Böylece, f fonksiyonunun, (a,b) noktasında diferansiyellenme tanımını sağladığı gösterilmiş olur.