$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$ limiti

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$ kuvvet serisini düşünelim. Yakınsaklık yarıçapını Oran Testi ile bulalım:

$$\lim \left| \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{n^n}{n!} x^n} \right| = \lim \left(\frac{n+1}{n} \right)^n |x| = e|x|$$

oluşundan, bu kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapının $\frac{1}{e}$ olduğu sonucuna varılır.Şimdi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

olduğunu gösterelim. Bir $\varepsilon > 0$ verilsin. $\frac{1}{e} + \varepsilon > \frac{1}{e}$ olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^n$$

serisi ıraksaktır ve ayrıca (Oran Testinin ispatında görüldüğü gibi)

$$\lim \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^n = +\infty$$

olur. Bunu sonucu olarak

$$\text{Her } n \geq K_1 \text{ için } \frac{n^n}{n!} \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^n > 1$$

olacak şekilde bir $K_1 \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\text{Her } n \geq K_1 \text{ için } \left(\frac{1}{e} + \varepsilon \right)^n > \frac{n!}{n^n}$$

ve

$$\text{Her } n \geq K_1 \text{ için } \frac{1}{e} + \varepsilon > \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

elde edilir. ($0 < \varepsilon < \frac{1}{e}$ iken) $x = \frac{1}{e} - \varepsilon$ için kuvvet serisi mutlak yakınsak olduğundan (n- nci Terim testinden)

$$\lim \left(\frac{1}{e} - \varepsilon \right)^n \frac{n^n}{n!} = 0$$

$$\text{Her } n \geq K_2 \text{ için } \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^n \frac{n^n}{n!} < 1$$

olacak şekilde bir $K_2 \in \mathbb{N}$ vardır. O zaman

$$\text{Her } n \geq K_2 \text{ için } \left(\frac{1}{e} - \varepsilon\right)^n < \frac{n!}{n^n}$$

ve

$$\text{Her } n \geq K_2 \text{ için } \frac{1}{e} - \varepsilon < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

olur.K, K_1 ile K_2 nin en büyüğü olsun. O zaman

$$\text{Her } n \geq K \text{ için } \frac{1}{e} - \varepsilon < \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} < \frac{1}{e} + \varepsilon \quad \left(\text{Yani } \left|\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} - \frac{1}{e}\right| < \varepsilon\right)$$

olur.
Bu da

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

olduğunu kanıtlar.

Aynı tekniği kullanarak, (a_n) pozitif terimli bir dizi ve $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ ise $\lim \sqrt[n]{a_n} = L$ olduğu gösterilebilir.