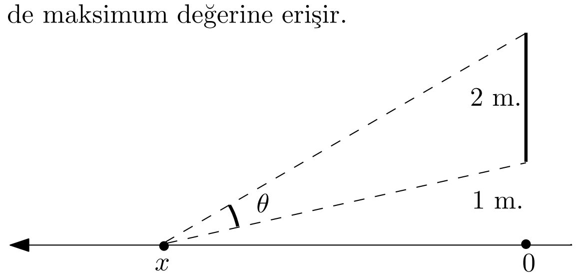
MT 131 FİNAL ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = \tan x,\ b = \frac{1}{3},\ a = 0$ olsun. $f'(x) = \sec^2 x,$
$f''(x) = 2\sec^2 x \tan x,\ f'''(x) = 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \tan^2 x$
$f(0) = 0, f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 2$ olduğundan $P_3(x) = x + \frac{x^3}{3}$
ve $\tan\frac{1}{3} \approx P_3(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{81} = \frac{28}{81}$ bulunur.

   (b) $f(x) = \theta = \text{Arctan}\,\frac{3}{x} - \text{Arctan}\,\frac{1}{x},\ (0, +\infty)$ aralığında maksimum yapılacak. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{x^2+9} = \frac{2(3-x^2)}{(x^2+1)(x^2+9)},\ (0, +\infty)$ aralığındaki Kritik tek sayı:$\sqrt{3}$

	$0 < x < \sqrt{3}$	$\sqrt{3} < x$
$f'(x)$	$+$	$-$

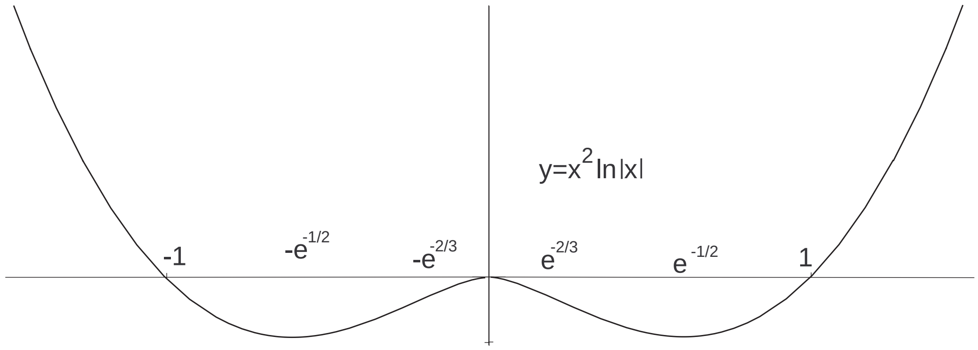
olduğundan ve $f,\ \sqrt{3}$ noktasında sürekli olduğundan, $f(x),\ x = \sqrt{3}$ de maksimum değerine erişir.



2. $D_f = \mathbb{R},\ f$ çift fonksiyon. $x = 0$ ise $y = 0$ ve $y = 0$ ise $x = 0,\ x = \pm 1$
$\lim_{x\to 0} \ln|x| = -\infty, \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,\ \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{2} = 0$
olduğundan, L'Hospital Kuralından, $\lim_{x\to 0} x^2 \ln|x| = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x^2}} = 0 = f(0)$
olduğundan $f,\ 0$ da sürekli olur. Diğer noktalarda da sürekli olduğundan Düşey Asimptotu yoktur. $\lim_{x\to\pm\infty} x^2 \ln|x| = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ olduğunda yatay asimptot da yoktur. (yine L'Hospital Kuralından)
$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln|x|}{x} = \lim_{x\to 0} x\ln|x| = \lim_{x\to 0} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$
ve $x \neq 0$ için $f'(x) = x(1 + 2\ln|x|)$ olduğundan, kritik sayılar:$0, \pm e^{-1/2}$,
$f''(0)$ yok ve $x \neq 0$ için $f''(x) = 2 + 3\ln|x|$ BN için adaylar: $0, \pm e^{-2/3}$

	$x < -e^{-\frac{1}{2}}$	$-e^{-\frac{1}{2}} < x < -e^{-\frac{2}{3}}$	$-e^{-\frac{2}{3}} < x < 0$	$0 < x < e^{-\frac{2}{3}}$	$e^{-\frac{1}{2}} < x < e^{-\frac{1}{2}}$	$x > e^{-1/2}$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
Grafik						

$x = \pm e^{-\frac{2}{3}}$ de Y. Min, $x = 0$ da Y. Maks,$x = \pm e^{-\frac{3}{4}}$ da Büküm Noktası vardır. $f(\pm e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{-1}{2e},\ f(\pm e^{-\frac{2}{3}}) = \frac{-2}{3}e^{-\frac{4}{3}},\ f(0) = 0$



3. (a) $y = (1-\cos 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$ olsun $\ln y = \dfrac{\ln(1-\cos 2x)}{\ln x}$ $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var.
$\dfrac{\frac{2\sin 2x}{1-\cos 2x}}{\frac{1}{x}} = \dfrac{2x\sin 2x}{1-\cos 2x} = \dfrac{2x\sin 2x(1+\cos 2x)}{\sin^2 2x} = \dfrac{2x(1+\cos 2x)}{\sin 2x} =$
$\dfrac{x(1+\cos 2x)}{\sin x\cos x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\dfrac{(1+\cos 2x)}{\cos x} = 2$, L'Hospital Kuralından,
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\cos 2x)}{\ln x} = 2$ olur. $(1-\cos 2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\frac{\ln(1-\cos 2x)}{\ln x}}$ ve e^x, 2 de sürekli olduğundan bileşkenin limiti teoreminden $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 2x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^2$

(b) e^x in ($x \to +\infty$ iken) düşey olmayan bir asimptotu ise $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x - P(x)) = 0$ olur, Dolayısıyla $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x - P(x)}{e^x}\right) = \dfrac{0}{+\infty} = 0$ olur. Buradan da $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \dfrac{P(x)}{e^x}\right) = 0$ bunun sonucu olarak $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{e^x} = 1$ elde edilir.

4. (a) $y = \coth^{-1} x$ olsun. $\coth y = x$, $x = \dfrac{e^y + e^{-y}}{e^y - e^{-y}}$,
$(e^y - e^{-y})x = e^y + e^{-y}$ $\qquad e^y(x-1) = e^{-y}(x+1)$
$(x-1)e^{2y} = x+1$ $\qquad e^{2y} = \dfrac{x+1}{x-1}$
$2y = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ $\qquad y = \frac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(b) $|x| \geq 1$ için $y = \operatorname{Arcsec} x$ olsun. $x = \sec y$ ve $0 \leq y \leq \pi$, $(y \neq \frac{\pi}{2})$ olur. $\cos y = \frac{1}{x}$ ve $0 \leq y \leq \pi$ olduğundan $y = \operatorname{Arccos}\frac{1}{x}$ olur.

5. (a) Ters FonksiyonunTürevlenebilmesi Teoreminden $g'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$, $(b = f(a))$ olur. $x^5 + 2x = 3$ denkleminin tek çözümü $x = 1$ olduğundan $g'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7}$ olur.

(b) Ters FonksiyonunTürevlenebilmesi Teoreminden $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$ olur. Her iki tarafın türevi alınırsa

$$g''(x) = \frac{-f''(g(x))g'(x)}{(f'(g(x)))^2} = \frac{-f''(g(x))}{(f'(g(x)))^3}$$

olur. $f''(g(x)) > 0$ ve $f'(g(x)) > 0$ olduğundan $g''(x) < 0$ olur.