MT 131 ARA SINAV ÇÖZÜMLER

1. (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x}-2}$ $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \geq 0, x \geq 0, \sqrt{x} - 2 \neq 0\}$
$= ((-\infty, -1] \cup [0, +\infty)) \bigcap [0, +\infty) \bigcap (\mathbb{R} - \{4\}) = [0, 4) \cup (4, +\infty)$

(b) $g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-2}$. $R_g = \{y \in \mathbb{R} :$ bir $x \in D_g$ için $y = g(x)\}$
$y = g(x) = \dfrac{x+3}{x^2-x-2}$
$y(x^2-x-2) = x+3$ denkleminin (x için) bir gerçel çözümü vardır.
$yx^2 - (y+1)x - (2y+3) = 0$ denkleminin (x için) bir gerçel çözümü vardır.
$\Delta = (y+1)^2 - 4y(-2y-3) \geq 0$
$9y^2 + 14y + 1 \geq 0 \Leftrightarrow y \in (-\infty, \frac{-7-2\sqrt{10}}{9}] \cup [\frac{-7+2\sqrt{10}}{9}, +\infty)$
$R_f = (-\infty, \frac{-7-2\sqrt{10}}{9}] \cup [\frac{-7+2\sqrt{10}}{9}, +\infty)$

2. (a) $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$, $x_1 < x_2$ olsun.
$f(x_1) - f(x_2) = \sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2} = \dfrac{(\sqrt[n]{x_1} - \sqrt[n]{x_2})(\sqrt[n]{x_1}^{n-1} + \sqrt[n]{x_1}^{n-2}\sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_2}^{n-1})}{\sqrt[n]{x_1}^{n-1} + \sqrt[n]{x_1}^{n-2}\sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_2}^{n-1}}$
$= \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt[n]{x_1}^{n-1} + \sqrt[n]{x_1}^{n-2}\sqrt[n]{x_2} + \cdots + \sqrt[n]{x_2}^{n-1}}$ olur.
$0 \leq x_1 < x_2$ olduğundan payda pozitif, $x_1 < x_2$ olduğundan pay negatifdir. Dolayısıyla $f(x_1) - f(x_2) < 0$ yani $f(x_1) < f(x_2)$ olur.

(b) $\sqrt{x^2-x+3} + x = \dfrac{(\sqrt{x^2-x+3}+x)(\sqrt{x^2-x+3}-x)}{\sqrt{x^2-x+3}-x} = \dfrac{\cancel{x^2} - x + 3 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-x+3}-x}$
$= \dfrac{-x+3}{\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}} - x}$ $x < 0$ için $\sqrt{x^2} = -x$ olur. Dolayısıyla
($x < 0$ için) $\sqrt{x^2-x+3} + x = \dfrac{x(-1+\frac{3}{x})}{-x(\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1)} = \dfrac{1-\frac{3}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}+1}$
Limit teoremlerinden: $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-x+3} + x = \dfrac{1-0}{\sqrt{1-0+0}+1} = \dfrac{1}{2}$
olur.

3. (a) i. $0 < x < 1$ için $\frac{\lfloor x \rfloor}{\sin x} = 0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\sin x} = 0$ olur.

ii. $-1 < x < 0$ için $\lfloor x \rfloor = -1$ olduğundan $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{\sin x}{\lfloor x \rfloor} = \lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\sin x}{-1} = \dfrac{0}{-1} = 0$
ve $-1 < x < 0$ için (ve $-\pi < -1$ olduğundan) $\sin x < 0$

olduğundan, aynı aralıkta, $\dfrac{\lfloor x \rfloor}{\sin x} = \dfrac{-1}{\sin x} > 0$ olur. Sonsuz limit tanımından $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{\lfloor x \rfloor}{\sin x} = +\infty$ elde edilir.

(b) Her gerçel x için $-1 \le \sin x \le 1$ ve $-1 \le \cos x \le 1$ olduğundan, her $x > \frac{1}{3}$ için (paydalar pozitif ve) $\frac{x-1}{3x+1} \le \frac{x+\sin x}{3x+\cos x} \le \frac{x+1}{3x-1}$ olur. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x\pm1}{3x\mp1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}(1\pm\frac{1}{x})}{\cancel{x}(3\mp\frac{1}{x})} = \frac{1\pm0}{3\mp0} = \frac{1}{3}$ olur. Sıkıştırma (Sandviç) Teoreminden $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{3x+\cos x} = \frac{1}{3}$ elde edilir.

4. (a) $f(x) = \tan x - \sqrt{x+1}$, $\lambda = 0$ olsun. $f(0) = -1 < 0$ ve $f(\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{\pi}{3}+1} > 0$ ($\frac{\pi}{3}+1 < \frac{7}{3} < 3$) olur. $f(x)$, $[0, \frac{\pi}{3})$ aralığında ($f(x)$ bir sürekli fonksiyon ve $[0, \frac{\pi}{3}) \subset [-1, \frac{\pi}{2}) \subset D_f$ olduğundan) $f(x)$, $[0, \frac{\pi}{3})$ aralığında süreklidir. Ara Değer teoremi gereği $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde bir $c \in (0, \frac{\pi}{3})$ vardır. Bu sayı $\tan x = \sqrt{x+1}$ denkleminin bir çözümüdür.

(b) $\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sin(\pi x)} = \dfrac{(\sqrt{3x-2}-2)(\sqrt{3x-2}+2)}{\sin(\pi x)(\sqrt{3x-2}+2)} = \dfrac{3(x-2)}{\sin(\pi x)(\sqrt{3x-2}+2)}$

$t = x-2$, değişken değişikliği yapalım. $\lim_{x\to2} t = 0$ ve $x \neq 2$ için $t \neq 0$ olur. $\lim_{x\to2} \frac{x-2}{\sin(\pi x)} = \lim_{t\to0} \frac{t}{\sin(\pi(t+2))} = \lim_{t\to0} \frac{t}{\sin(\pi t)}$ olur. Bu kez $u = \pi t$ olsun. $\lim_{t\to0} u = 0$ ve $t \neq 0$ için $u \neq 0$ olduğundan $\lim_{t\to0} \frac{t}{\sin(\pi t)} = \lim_{u\to0} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{1}{\pi}$ olur. Dolayısıyla:

$\lim_{x\to2} \frac{\sqrt{3x-2}-2}{\sin \pi x} = \lim_{x\to2} \frac{3}{\sqrt{3x-2}+2} \lim_{x\to2} \frac{x-2}{\sin \pi x} = \frac{3}{4\pi}$ bulunur.

5. (a) i. $a = \frac{\pi}{2}$ olsun. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ için $\lfloor \cos x \rfloor = 0$ olduğundan $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} x\lfloor \cos x \rfloor = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} 0 = 0$. $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ için $\lfloor \cos x \rfloor = -1$ olduğundan $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} x\lfloor \cos x \rfloor = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} -x = -\frac{\pi}{2}$ olur. $g(x)$, $a = \frac{\pi}{2}$ noktasında sıçrama tipi süreksizliğe sahiptir.

ii. $b = 2\pi$ olsun. $\frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$, $x \neq 2\pi$ için $\lfloor \cos x \rfloor = 0$ olduğundan $\lim_{x\to2\pi} x\lfloor \cos x \rfloor = \lim_{x\to2\pi} 0 = 0$ olur ama $g(2\pi) = 2\pi \neq \lim_{x\to2\pi} g(x)$ olduğundan $g(x), b = 2\pi$ noktasında kaldırılabilir süreksizliğe sahiptir.

(b) $\Delta f = \dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}\sqrt{x+\Delta x}}$

$\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+\Delta x}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta x\,\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x}\right)}$

$$= \frac{\cancel{x} - (\cancel{x} + \Delta \cancel{x})}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,\Delta \cancel{x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})} = \frac{-1}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+\Delta x}\,(\sqrt{x}+\sqrt{x+\Delta x})}$$

olduğundan (Limit Teoremleri kullanılmasıyla) her $x > 0$ için:

$f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{-1}{2(\sqrt{x})^3}$ bulunur.