MT 131 ARA SINAV (Kasım 2006) ÇÖZÜMLER

1. (a) $2\sin x$ her yerde sürekli, $\lfloor\ \rfloor$ tamsayılar dışında sürekli olduğundan (Bileşkenin sürekliliği teoremi nedeniyle) $f(x)$, $2\sin x \notin \mathbb{Z}$ iken sürekli olur. $2\sin x \in \mathbb{Z}$ (bu aralıkta) yalnızca $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ için olur.
$0 < x < \frac{\pi}{6}$ için $0 < 2\sin x < 1$ ve $f(x) = 0$ olduğundan
$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}^-} 0 = 0$
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ için $1 < 2\sin x < 2$ ve $f(x) = 1$ olduğundan
$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{6}^+} 1 = 1$ olur.
Bu nedenle $f(x)$, $\frac{\pi}{6}$ da **sıçrama** süreksizliğine sahiptir.
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6},\ x \neq \frac{\pi}{2}$ için $1 < 2\sin x < 2$ ve $f(x) = 1$ olduğundan
$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 1 = 1 \neq 2 = f(\frac{\pi}{2})$ olur.
Bu nedenle $f(x)$, $\frac{\pi}{2}$ da **kaldırılabilir** süreksizliğine sahiptir.

(b) $x_1 < x_2,\ x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ olsun.
$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1}{x_2^2+x_2} - \frac{1}{x_1^2+x_1} = \frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2+1)}{(x_1^2+x_1)(x_2^2+x_2)}$ olur. Bu aralıkta $x_1+x_2+1 > 0$, $x_1^2+x_1 > 0$, $x_2^2+x_2 > 0$ olduğundan ve $x_1-x_2 < 0$ varsayıldığından $f(x_2)-f(x_1) < 0$ olur. Bu da $f(x)$ in bu aralıkta kesin azalan olması demektir.

2. (a) $\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sin \pi x} = \dfrac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\sin \pi x(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} = \dfrac{x-1}{\sin \pi x(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$
$t = \pi(x-1)$ alınırsa $\lim_{x\to 1} t = 0$ ve $x \neq 1$ için $t \neq 0$ olur. Limitler için Değişken Değiştirme Teoreminden.
$\lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sin \pi x} = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{t}{\pi}}{\sin(t+\pi)} = \frac{1}{\pi} \lim_{t\to 0} \frac{t}{-\sin t} = \frac{-1}{\pi}$
$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{1}{3}$ olduğundan
$\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sin \pi x} = \lim_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sin \pi x} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{-1}{3\pi}$

(b) $f(x) = \cos x - \sqrt{x+\sqrt{2}}$ olsun. $f(x)$, $[-\sqrt{2}, +\infty)$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyondur. $f(-\sqrt{2}) = \cos\sqrt{2} > 0$ $(0 < \sqrt{2} < \frac{\pi}{2})$, $f(0) = 1 - \sqrt[4]{2} < 0$ olur. $f(x)$, $[-\sqrt{2}, 0]$ aralığında sürekli ve $f(-\sqrt{2}) < \lambda = 0 < f(0)$ olduğundan Ara Değer Teoreminden $f(c) = \lambda = 0$ olacak şekilde bir $c \in (-\sqrt{2}, 0)$ vardır. Bu c sayısı için $\cos c = \sqrt{c+\sqrt{2}}$ olur.

3. (a) $\dfrac{\sin|x|}{1-\cos x} = \dfrac{\sin|x|(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)} = \dfrac{\sin|x|(1+\cos x)}{\sin^2 x}$
$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ aralığında $\sin|x| = |\sin x|$ olduğundan ($x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ için)

$\dfrac{\sin|x|}{1-\cos x} = \dfrac{1+\cos x}{\sin|x|} = \dfrac{1+\cos x}{|\sin x|}$ olur. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|\sin x|}{1+\cos x} = 0$ ve $x \in (-\pi,\pi)$, $x \neq 0$ için $f(x) = \dfrac{\sin|x|}{1-\cos x} > 0$ olduğundan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin|x|}{1-\cos x} = +\infty$ olur.

(b) $\sqrt{4x^2+2x-1} - 2\sqrt{x^2-x+1} = \dfrac{6x-5}{\sqrt{4x^2+2x-1}+2\sqrt{x^2-x+1}}$

$= \dfrac{x(6-\frac{5}{x})}{|x|\left(\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)}$

$x \to +\infty$ olduğundan $x > 0$ varsayabiliriz ve $|x| = x$ olur. Böylece:

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{4x^2+2x-1} - 2\sqrt{x^2-x+1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{6-\frac{5}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}}+2\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \dfrac{3}{2}$

4. (a) $R_f = \{y \in \mathbb{R} : \text{Bir } x \in D_f \text{ için } y = \frac{x^2+x}{x+2}\}$
$y(x+2) = x^2 + x$
$x^2 + (1-y)x - 2y = 0$
Çözümün var olması için $\Delta \geq 0$ olması gerekli ve yeterlidir.
$\Delta = (1-y)^2 + 8y \geq 0$ olmalı.
$y^2 + 6y + 1 \geq 0$ olmalı.
$y \leq -3-2\sqrt{2}$ veya $y \geq -3+2\sqrt{2}$ olmalı.
$R_f = (-\infty, -3-2\sqrt{2}\,] \cup [-3+2\sqrt{2}, +\infty)$

(b) $x > 0$ için $0 \leq \frac{\sin^2 x}{x} \leq \frac{1}{x}$ ve $\lim_{x\to+\infty} 0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğundan Sandviç Teoreminden $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$ bulunur. cos fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan Bileşkenin Limiti ile ilgili Teoremden $\lim_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\sin^2 x}{x}\right) = \cos 0 = 1$ olur.

5. (a) $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^+} \dfrac{x-\pi}{\sin x} \overset{t=x-\pi}{=} \lim\limits_{t\to 0^+} \dfrac{t}{-\sin t} = -1$

$\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) = \lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{\sin x} = +\infty$

$(\lim\limits_{x\to\pi^-} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to\pi^-} \sin x = 0$ ve $0 < x < \pi$ için $f(x) > 0$ olduğundan)

(b) i. $-3 < a < -1$ olsun.

$$\lim_{x\to a} f(x) \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to -a} f(-t) = \lim_{t\to -a} f(t) = f(-a) = f(a)$$
$(1 < -a < 3$ ve f, $-a$ da sürekli olduğundan)

ii. $a = -1$ için
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \overset{t=-x}{=} \lim_{t\to 1^+} f(-t) = \lim_{t\to 1^+} f(t) = f(1) = f(-1)$$
(f, 1 de sağdan sürekli olduğundan)

Koşulları sağlandığından f $(-3,-1]$ de süreklidir.