MT 131 ANALİZ I FİNAL SINAVI (2019) Çözümler

1. $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3-1}$, $f'(x) = \dfrac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}$, Kritik Sayılar:0, $\sqrt[3]{4}$

$f''(x) = \dfrac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}$, Büküm noktası adayları: $0, -\sqrt[3]{2}$

		$-\sqrt[3]{2}$		0		1		$\sqrt[3]{4}$	
$f'(x)$	$+$		$+$	$\mid$	$-$	$\Vert$	$-$	$\mid$	$+$
Artan-azalan	$\nearrow$		$\nearrow$	$\mid$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	$\mid$	$\nearrow$
$f''(x)$	$+$	$\mid$	$-$	$\mid$	$-$	$\Vert$	$+$		$+$
Bükeylik	$\smile$	$\mid$	$\frown$	$\mid$	$\frown$	$\Vert$	$\smile$		$\smile$

Fonksiyon, 0 ve $\sqrt[3]{4}$ da sürekli olduğundan, I. Türev testinden, 0 da yerel maksimuma, $\sqrt[3]{4}$ de yerel minimuma sahiptir.

Fonksiyon, $-\sqrt[3]{2}$ de (türevlenebildiği için) teğete sahiptir, bükeylik de değiştiği için $-\sqrt[3]{2}$ de bir Büküm Noktası vardır.

2. a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}}$ limitinde ∞^0 belirsizliği vardır.

$\ln(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = \frac{\ln(1+x^2)}{\ln x}$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln x}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralının diğer koşulları da sağlanıyor. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{1+\frac{1}{x^2}} = 2$ olur.

exp = üst fonksiyonu 2 de sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti Teoreminden,

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln x}} = \exp\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\ln x}\right) = \exp(2) = e^2$ olur

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arcsin} x - \sinh x}{x^3}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralının diğer koşulları da sağlanıyor. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - \cosh x}{3x^2}$ limitinde de $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralının diğer koşulları da sağlanıyor.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} - \sinh x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6} - \dfrac{1}{6}\dfrac{\sinh x}{x}\right) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{6} = 0$

($\sinh' = \cosh$ olduğu için $\lim_{x\to 0}\frac{\sinh x}{x} = \cosh 0 = 1$)

İki kez L'Hospital in Kuralının uygulanması ile, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arcsin} x - \sinh x}{x^3} = 0$ bulunur.

3. (a) $y = \operatorname{Arctan} x$ olsun. $\tan y = x$ ve $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ olur. $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$ olduğundan $\sec(\operatorname{Arctan} x) = \sec y = \pm\sqrt{1+x^2}$ olmalıdır. $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ olduğu için $\sec y \geq 0$ olacaktır. Bu nedenle, (her $x \in \mathbb{R}$ için) $\sec(\operatorname{Arctan} x) = \sqrt{1+x^2}$ olur.

(b) $f(x) = \text{Arccos}\,\frac{1}{x}$, $g(x) = \text{Arcsec}\,x$, $I = [1, \infty)$ olsun. f ve g, I aralığında sürekli ve aralığın her iç noktasında türevlenebilen fonksiyonlardır. Her $x > 1$ için:

$$f'(x) = \frac{-(\frac{-1}{x^2})}{\sqrt{1-(\frac{1}{x})^2}} = \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} = g'(x)$$

olur. Ortalama Değer Teoreminin sonucundan, (her $x \in I$ için) $f(x) = g(x) + C$ olacak şekilde bir C sayısı vardır. $x = 1 \in I$ için, $f(1) = 0$ ve $g(1) = 0$ olduğundan $C = 0$ olmak zorundadır. Öyleyse, her $x \in I$ için, $\text{Arccos}\,\frac{1}{x} = \text{Arcsec}\,x$ olduğu gösterilmiştir.

4. $f'(x) = 3x^2 - 6x + 4$ ve $f''(x) = 6x - 6$ olur. $x < 1$ için $f''(x) < 0$, $x > 1$ için $f''(x) > 0$ olur. (f, 1 de bir büküm noktasına sahiptir.) Her $x \in \mathbb{R}$ için $f'(x) > 0$ olduğundan, $f, \mathbb{R}$ de kesin artandır. Ters Fonksiyonun Türevlenebilmesi Teoreminden ($g = f^{-1}$) , $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ olur ve g, $\mathbb{R}$ de kesin artandır. Türev alma kurallarından, $g''(x) = \dfrac{-f''(g(x))g'(x)}{(f'(g(x))^2}$ dir.

$f(1) = 2$ (ve $g(2) = 1$) dir, bu nedenle, g, 2 de türevlenebiliyor olup, g, 2 de teğete sahiptir.

$x < 2$ için $g(x) < g(2) = 1$, $f''(g(x)) < 0$ ve $g'(x) > 0$ olduğundan, $g''(x) > 0$ olur.

$x > 2$ için $g(x) > g(2) = 1$, $f''(g(x)) > 0$ ve $g'(x) > 0$ olduğundan, $g''(x) < 0$ olur.

Öyleyse, g fonksiyonu 2 de bir büküm noktasına sahiptir.

5. (a) $P(x) = ax + b$ (a, b sabit $a \neq 0$) polinomu olsun. $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{e^x}$ olup, ($a \neq 0$ **olduğu için**) bu limitte $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. L'Hospital in Kuralının diğer koşulları da sağlanıyor. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{a}{e^x} = \dfrac{a}{+\infty} = 0$ olur. L'Hospital in Kuralından, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x)e^{-x} = 0$ bulunur.

$f(x) = e^x$ fonksiyonunun bir eğik asimptota sahip olduğunu varsayalım. O zaman ($\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ olduğundan), eğik asimptot tanımından, bir $P(x) = ax + b$ ($a \neq 0$) polinomu için $\lim\limits_{x\to+\infty} (e^x - P(x)) = 0$ olur. Bu durumda , Limit Teoremlerinden (bu polinom için), $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{P(x)}{e^x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - P(x)}{e^x} = \dfrac{0}{\infty} = 0$ olur. Bu eşitlikten, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{P(x)}{e^x} = 1$ olduğu sonucuna varılır. Oysa, yukarıda, bu limitin 0 olduğu gösterilmiş idi. Bu çelişki, $f(x) = e^x$ fonksiyonunun bir eğik asimptota sahip olduğunu varsayımının yanlış olduğunu gösterir.

(b) $\lim\limits_{x\to1^+} (\ln x)^{x-1}$ limitinde 0^0 belirsizliği vardır. $\ln{(\ln x)}^{x-1} = (x-1)\ln(\ln x)$ dir.

$$\lim_{x\to1^+} (x-1)\ln(\ln x) = \lim_{x\to1^+} \frac{\ln(\ln x)}{\frac{1}{x-1}} \stackrel{*}{=} \lim_{x\to1^+} \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to1^+} \frac{1-x}{x}\frac{x-1}{\ln x} = 0 \quad \left(\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \text{ idi}\right)$$

(*: Burada, L'Hospital in Kuralını kullandık)

$(\ln x)^{x-1} = \exp((x-1)\ln(\ln x))$ ve exp fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan, Bileşkenin Limiti teoreminden, $\lim\limits_{x\to1^+} (\ln x)^{x-1} = \exp 0 = e^0 = 1$ bulunur.

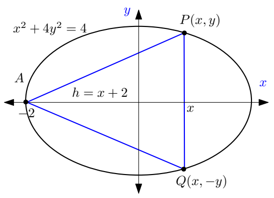
6. $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}, \; b = 26, \; a = 27$ olsun. $(f, (0, +\infty)$ aralığında en az 4 kez türevlenebiliyor$)$ Kalanlı Taylor Teoreminden, $\sqrt[3]{26} = f(b) \approx P_3(27)$ yaklaşık eşitliğinde Hata$=|R_3|$ olur.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}}, \; f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}, \; f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}, \; f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}, \; f''''(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}}$$

$f(27) = 3, \; f'(27) = \frac{1}{3^3}, \; f''(27) = -\frac{2}{3^7}, \; f'''(27) = \frac{10}{3^{11}}, \quad P_3(x) = 3 + \frac{x-27}{3^3} - \frac{(x-27)^2}{3^7} + \frac{5(x-27)^3}{3^{12}}$ oluşundan, $\sqrt[3]{26} \approx 3 - \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^7} - \frac{5}{3^{12}}$ olur.

Kalanlı Taylor Teoreminden, $R_3 = \dfrac{f^{(4)}(c)}{4!}(26-27)^4$ olacak şekilde (en az) bir $26 < c < 27$ sayısı vardır.

$$|R_3| = \frac{10}{3^5 c^{\frac{11}{3}}}, \quad 26 < c < 27 \text{ oluşundan } 2^{11} = 8^{\frac{11}{3}} < 26^{\frac{11}{3}} < c^{\frac{11}{3}} \text{ ve } |R_3| = \frac{10}{3^5 c^{\frac{11}{3}}} < \frac{10}{3^5 2^{11}} \text{ olur.}$$

7. 

$P(x, y)$, üçgenin x-ekseni yukarısında kalan köşesi olsun, $y \geq 0$ olur. Üçgenin alanı maksimum yapılacak. Alan $= \frac{1}{2}ah$ dir.

$h = x - (-2) = x + 2$ ve $a = y - (-y) = 2y$ olur,

Alan $= y(x + 2)$ maksimum yapılacak.

$P(x, y)$ noktası elips üzerinde olduğu için, $x^2 + 4y^2 = 4$ olmalı.

$y \geq 0$ olduğu için, $y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ olur. Bu nedenle,

Alan $= f(x) = (x+2)\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{4 - x^2}$ maksimum yapılacak.

$P(x, y)$ noktası elips üzerinde olduğu (ve APQ bir üçgen olduğu) için $-2 < x < 2$ olmalıdır.

Öyleyse, $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)\sqrt{4 - x^2}$ fonksiyonu $(-2, 2)$ aralığında maksimum yapılmalıdır.

$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}\right) = \dfrac{2 - x - x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$ olup kritik sayılar $\pm 2, 1$ dir.

Bunlardan sadece $1 \in (-2, 2)$ dir. $f'(x)$, $2 - x - x^2$ ile aynı işarete sahiptir. ($2 - x - x^2$ polinomunun kökleri $1, -2$ olduğu için)

	-2		1		2
$f'(x)$	|	$+$	|	$-$	|
Artan-Azalan	|	$\nearrow$		$\searrow$	|

f, 1 de sürekli olduğu için, 1. türev testinden, f, $(-2, 2)$ aralığındaki maksimum değerine $x = 1$ de ulaşır. Bunun sonucu olarak, en büyük ikizkenar üçgenin diğer köşeleri $P(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ve $Q(1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ noktalarındadır.