MT 131 ANALİZ I 2014-2015 FİNAL ÇÖZÜMLER

1. (a) $f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, f, 0 da türevlenemez (ama tanımlı); 0 bir kritik sayı. $\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}(2x+1)$; $-\frac{1}{2}$ de kritik sayı. f her iki kritik sayıda da süreklidir. $f''(x) = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}(x-1)$, f'', 0 da yoktur ve 1 de sıfır olur. (Türevin var olmadığı nokta $\|$ ile gösterilmiştir)

		$-\frac{1}{2}$		0	
$f'(x)$	$-$		$+$	$\|$	$+$
Fonksiyon	$\searrow$		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$

		0		1	
$f''(x)$	$+$	$\|$	$-$		$+$
Grafik	$\smile$	$\|$	$\frown$		$\smile$

Birinci türev testinden, f, $\frac{-1}{2}$ de bir yerel minimuma sahiptir. 0 da bir yerel ekstremum yoktur. f, (0 da düşey teğete sahip olduğu için) 0 da ve (2 de türevlenebildiği için teğete sahiptir) 2 de de büküm noktasına sahiptir.

(b) $g^{(n)}(x) = \frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})\cdots(\frac{1}{3}-n+1)x^{\frac{1}{3}-n}2\cdot 2\cdots 2 = (-1)^{n-1}2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)\left(\frac{2}{3}\right)^n x^{\frac{1}{3}-n}$ $(n>1)$

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0}(\text{Arctan}\, x - \text{Arcsin}\, x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} x^3$ (her ikisi de sürekli fonksiyon) olduğu için $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. $\frac{d}{dx}(\text{Arctan}\, x - \text{Arcsin}\, x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$. Yine $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. $\frac{d}{dx}(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$.

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-2x}{(1+x^2)^2} - \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{-2}{(1+x^2)^2} - \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6} = \dfrac{-1}{2}$. L'Hospital Kuralından, $\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} = \frac{-1}{2}$.
Yine, L'Hospital Kuralından, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\text{Arctan}\, x - \text{Arcsin}\, x}{x^3} = \dfrac{-1}{2}$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(e^x + x)}{3x-2}$ limitinde $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği vardır. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{d}{dx}\ln(e^x+x)}{\frac{d}{dx}(3x-2)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{e^x+1}{e^x+x}}{3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+1}{3(e^x+x)}$ yine $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. L' Hospital Kuralı uygulanabilir. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{3(e^x+1)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{3(1+e^{-x})} = \dfrac{1}{3}$ olur. L'Hospital Kuralından, önce, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x+1}{3(e^x+x)} = \dfrac{1}{3}$, sonra da, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(e^x+x)}{3x-2} = \dfrac{1}{3}$ olur.

3. (a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$ fonksiyonu, 1 dışında süreklidir.

$$\lim_{x\to 1} \tfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \tfrac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}-2)} = \lim_{x\to 1} \tfrac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to 1} \tfrac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} = \tfrac{1}{2}$$

olduğundan, düşey asimptot yoktur.

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\left(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}} - \frac{2}{|x|}\right)}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{\sqrt{1-\frac{3}{x^2}} - \frac{2}{|x|}}{1-\frac{1}{x}} = \pm 1$$

($x \to +\infty$ iken $x > 0$, $x \to -\infty$ iken $x < 0$ kabul edilebildiği için)

(b) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left((e^x-1)^{\frac{2}{\ln x}}\right)$ limitinde 0^0 belirsizliği var. $\ln\left((e^x-1)^{\frac{2}{\ln x}}\right) = \frac{2\ln(e^x-1)}{\ln x}$. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\ln(e^x-1)}{\ln x}$ de $\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği var. L' Hospital kuralı uygulanabilir.
$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{d}{dx}(2\ln(e^x-1))}{\frac{d}{dx}(\ln x)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\frac{e^x}{e^x-1}}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2xe^x}{e^x-1}$ limitinde $\frac{0}{0}$ belirsizliği var. Bir kez daha

L'Hospital kuralı uygulanabilir.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{d}{dx}(2xe^x)}{\frac{d}{dx}(e^x-1)} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x+2)e^x}{e^x} = 2$. L' Hospital Kuralından, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\ln(e^x-1)}{\ln x} = 2$ olur.

e^x, 2 de sürekli olduğundan, bileşkenin limiti teoreminden,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left((e^x-1)^{\frac{2}{\ln x}}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{2\ln(e^x-1)}{\ln x}} = e^2$ bulunur.

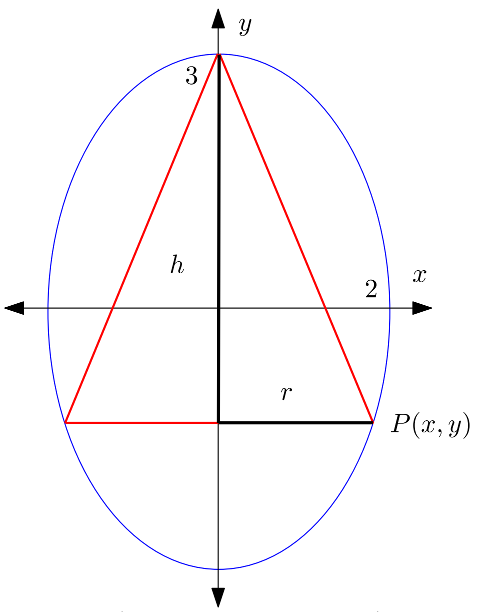
4. (a) Her $-1 \le x \le 1$ için $\mathrm{Arccos}(-x) = \pi - \mathrm{Arccos}(x)$ olduğunu gösterin. Bu sorunun 3 farklı çözümü, 2011-2012 MT 131 Final Sınavı çözümlerinde (1. soru) bulunabilir.

(b) $f(x) = \ln x$ için $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f'''(x) = \frac{2}{x^3}$, $a = 1$ için $f(a) = \ln 1 = 0$, $f'(a) = 1$, $f''(a) = -1$, $f'''(a) = 2$ olduğundan,

$P_3(x) = 0 + \frac{1}{1!}(x-1) - \frac{1}{2!}(x-1)^2 + \frac{2}{3!}(x-1)^3 = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$

$b = \frac{3}{2}$ alınıp, $\ln\frac{3}{2} = f(b) \approx P_3(b) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} = \frac{5}{12}$ bulunur.

Kalanlı Taylor Teoreminden, Hata$=\left|\ln\frac{3}{2} - P_3(\frac{3}{2})\right| = |R_3| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}\left(\frac{3}{2}-1\right)^4\right|$ o.ş. bir $1 < c < \frac{3}{2}$ vardır. $f^{(4)}(x) = \frac{6}{x^4}$ olduğu için, Hata$=\frac{1}{2^6c^4}$ o.ş. bir $1 < c < \frac{3}{2}$ sayısı vardır. $1 < c^4 < \frac{81}{16}$ olduğu için $\frac{16}{81} < \frac{1}{c^4} < 1$, buradan da, Hata$< \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$ elde edilir.

5. 

(En büyük koniyi elde etmek için üçgenin tepe noktasını (0,3) da (veya (0,−3) de) olması ve diğer köşelerin de elips üzerinde olması gerektiği aşikardır). Koninin hacmi: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ dir. $P(x,y)$, üçgenin x-ekseninin sağında kalan köşesi olsun.

$r = x$, $h = 3 - y$ olur. $V = \frac{1}{3}\pi x^2(3-y)$ maksimum yapılacak.

P, elips üzerinde olduğu için, $x^2 = 4 - \frac{4}{9}y^2$ olur.

$V = \frac{1}{3}\pi(4 - \frac{4}{9}y^2)(3-y)$ maksimum yapılacak.

$-3 < y < 3$ olmalı.

$f(y) = \frac{\pi}{3}(4 - \frac{4}{9}y^2)(3-y) = \frac{4\pi}{27}(27 - 9y - 3y^2 + y^3)$, $(-3,3)$ aralığında maksimum yapılacak.

$f'(y) = \frac{4\pi}{27}(3y^2 - 6y - 9) = \frac{4\pi}{9}(y^2 - 2y - 3) = 0$. Kritik sayılar: $y = 3$, $y = -1$. Sadece -1, $(-3,3)$ aralığındadır.

		-3		-1		3	
$f'(y)$	$+$	|	$+$	|	$-$	|	$+$
Fonksiyon	$\nearrow$	|	$\nearrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$

f, -1 de sürekli olduğundan, $(-3,3)$ aralığındaki maksimum değerine $y = -1$ de ulaşır. Bu y değeri için, $h = 4$ ve $r = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ bulunur. Üçgenin kenarları: taban$=2r = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ diğer kenarlar: $\sqrt{16 + \frac{32}{9}}$ olur.

İkinci çözüm (Özet):

h, koninin yüksekliği, r taban yarıçapı olsun. (Şekilde görüldüğü gibi) $(r, 3-h)$ koordinatlı nokta (üçgenin bir köşesidir ve) elips üzerinde olur. Bu da $\frac{r^2}{4}+\frac{(3-h)^2}{9}=1$ olması demektir. Bu eşitlikten $r^2=4-\frac{4}{9}(3-h)^2$ elde edilir. $V=f(h)=\frac{\pi}{3}(4h-\frac{4}{9}h(3-h)^2)=\frac{4\pi}{27}(6h^2-h^3)$, $(0,6)$ aralığında maksimum yapılacak. Bu fonksiyonun $(0,6)$ aralığındaki tek kritik sayısı ($f'(h)=\frac{12\pi}{27}(4h-h^2)$ olduğu için) $h=4$ bulunur. Yine, türevin (0,6) aralığındaki işareti incelenerek, f nin (0,6) aralığındaki maksimum değerine $h=4$ iken erişeceği görülür.