MT 131 2005 Final Çözümler

1.$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$,Tanım Kümesi $D_f = \mathbb{R} - \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, +1) \cup (+1, +\infty)$

f tek fonksiyon.$x = 0$ ise $y = 0$ ve $y = 0$ ise $\frac{x^3}{x^2-1} = 0$ buradan $x = 0$ bulunur.

$x^2 - 1 = 0$ da D. Asimptot olabilir. $\lim_{x\to 1^\pm} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty, \lim_{x\to -1^\pm} \frac{x^3}{x^2-1} = \pm\infty$ olduğundan $x = \pm 1$ Düşey Asimptot olur.

$\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$, $y = x$ eğik asimptot.

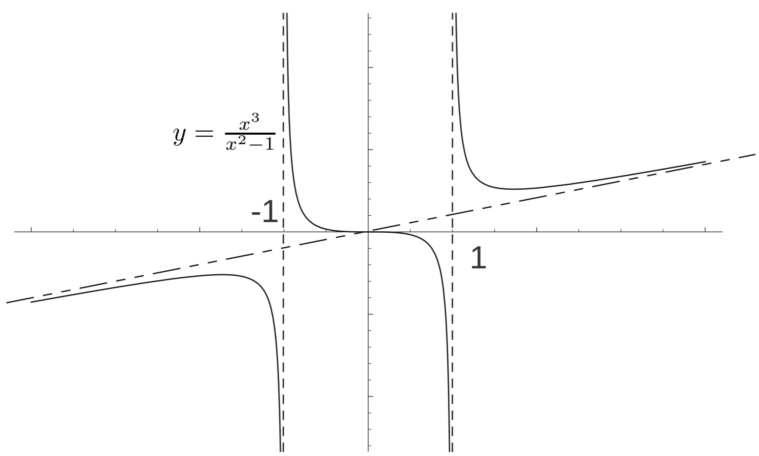
$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1)-x^3 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4-3x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$ Kritik Sayılar:$0, \pm\sqrt{3}$

$f''(x) = \frac{x(x^4+8x^2+3)}{(x^2-1)^3}$, $f'(x) = 0$ ise $x = 0$ olur.

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
y'	$++++++$	$------$	$------$	$------$	$------$	$++++++$
y''	$------$	$------$	$++++++$	$------$	$++++++$	$++++++$
grafik	art., aş.bük.	az., aş. bük.	az., yuk. bük.	az., aş. bük.	az., yuk. bük.	art.,yuk. bük.

Bu tabloya göre, ($f, \pm\sqrt{3}$ de sürekli,0 da teete sahip olduğundan) $-\sqrt{3}$ de yerel. Maks.,$\sqrt{3}$ de yerel min ve 0 da büküm noktasına sahiptir.

$f(\pm\sqrt{3}) = \frac{\pm 3\sqrt{3}}{2}, f(0) = 0, (\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$:y.maks,$(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2})$:y.min., $(0, 0)$:büküm

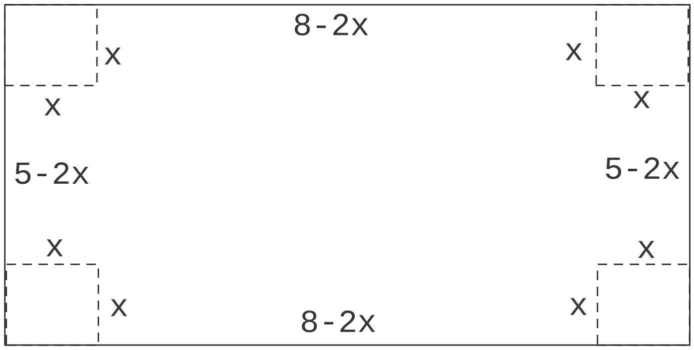


noktası

2a)Kesilen karenin kenarı x olsun. Tabanın eni $8-2x$, boyu $5-2x$, yükseklik x olur.Hacim=$x(5 - 2x)(8 - 2x) = 4x^3 - 26x^2 + 40x$ olur.

$f(x) = 4x^3-26x^2+40x, 0 < x < \frac{5}{2}$ olmalıdır. $f(x)$ in $(0, \frac{5}{2})$ aralığında maksimum yapılması gereklidir. $x = 0, \frac{5}{2}$ için hacim 0 olacağından $[0, \frac{5}{2}]$ aralığındaki maksimumu bulmak yeterlidir. Aralık kapalı ve sınırlı f bu aralıkta sürekli olduğundan maks ve min değerlerine erişir.

$f'(x) = 12x^2 - 52x + 40 = 4(3x^2 - 13x + 10)$,Kritik sayı: 1,($\frac{10}{3}$bu aralıkta değil) $f(1) = 18, f(0) = f(\frac{5}{2}) = 0$ olduğundan maksimum hacme $x = 1$ için



erişir.

b)cos(Arcsin $\frac{12}{13}$−Arccos $\frac{3}{5}$) =cos(Arcsin $\frac{12}{13}$) cos(Arccos $\frac{3}{5}$)+sin(Arcsin $\frac{12}{13}$) sin(Arccos $\frac{3}{5}$) = $\frac{5}{13}\frac{3}{5}+\frac{12}{13}\frac{4}{5}=\frac{63}{65}$

3a)$\lim_{x\to 1}\frac{2\sin\pi x+\pi(x^2-1)}{(x-1)^2}$ (0/0 belirsizliği) $(2\sin\pi x+\pi(x^2-1))'=2\pi\cos\pi x+2\pi x$, $((x-1)^2)'=2(x-1)$,yine 0/0 belirsizliği var. $(2\pi\cos\pi x+2\pi x)'=-2\pi^2\sin\pi x+2\pi$, $(2(x-1))'=2$ olur.

$\lim_{x\to 1}\frac{-2\pi^2\sin\pi x+2\pi}{2}=\pi$ olduğundan L'Hospital kuralından $\lim_{x\to 1}\frac{2\pi\cos\pi x+2\pi x}{2(x-1)}=\pi$ olur. Yine L'Hospital kuralından $\lim_{x\to 1}\frac{2\sin\pi x+\pi(x^2-1)}{(x-1)^2}=\pi$ bulunur.

b)$\lim_{x\to 0}|\ln(1-\cos x)|^{\sin x}$ (∞^0 belirsizliği) . $\ln(|\ln(1-\cos x)|^{\sin x})$

$=\sin x\,\ln|\ln(1-\cos x)|=\frac{\ln|\ln(1-\cos x)|}{\frac{1}{\sin x}}$ (∞/∞ belirsizliği).

$(\ln|\ln(1-\cos x)|)'=\frac{\sin x}{(1-\cos x)|\ln(1-\cos x)|}$, $(\frac{1}{\sin x})'=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}$, $\frac{\frac{\sin x}{(1-\cos x)|\ln(1-\cos x)|}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}=\frac{\sin^3 x}{(1-\cos x)|\ln(1-\cos x)|(-\cos x)}=\frac{\sin^3 x(1+\cos x)}{(1-\cos x)|\ln(1-\cos x)|(-\cos x)(1+\cos x)}=\frac{\sin^3 x(1+\cos x)}{\sin^2 x|\ln(1-\cos x)|(-\cos x)}=\frac{\sin x(1+\cos x)}{|\ln(1-\cos x)|(-\cos x)}$ ve $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1+\cos x)}{|\ln(1-\cos x)|(-\cos x)}=\frac{0\cdot 2}{+\infty\cdot(-1)}=0$ olduğundan L'Hospital kuralından $\lim_{x\to 0}\frac{\ln|\ln(1-\cos x)|}{\frac{1}{\sin x}}=0$ olur. $|\ln(1-\cos x)|^{\sin x}=e^{\sin x\ln|\ln(1-\cos x)|}$ olduğundan ve e^x fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan (bileşkenin limiti ile ilgili teoremden) $\lim_{x\to 0}|\ln(1-\cos x)|^{\sin x}=e^{\lim_{x\to 0}\sin x\ln|\ln(1-\cos x)|}=e^0=1$

4a)$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}2-x^2=1$ ve $\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2-x+1=1$ ve $f(1)=1$ olduğundan f, 1 de sürekli olur. Diğer sayılarda, polinomların sürekliliği nedeniyle sürekli olduğundan ve [-2,5] kapalı ve sınırlı olduğundan, f , bu aralıkta maksimum ve minimum değerlerine erişir. Bu değerlere sınırda veya bir iç kritik sayıda erişecektir. $f'(1)$ yoktur (sağdan türev=-2 , soldan türev=1, farklı olduğundan) . $f'(x)=\begin{cases}2x-1 & x<1\\ -2x & x>1\end{cases}$ olur. Bu aralıktaki kritik sayılar:$\frac{1}{2}$,1 dir. Uçlar:$-2,5$. $f(-2)=7, f(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}, f(1)=1, f(5)=-23$, Maks=7 ve min $=-23$ olur.

b)$f(x)=\text{Arcsin}\,x$, $a=\frac{1}{2}$ olsun. $f(x+\Delta x)=f(x)+\Delta f\approx f(x)+df=f(x)+f'(x)\Delta x$ yani $f(b)\approx f(a)+f'(a)(b-a)$ dir. $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, f(a)=$

Arcsin $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}, f'(a) = \frac{2}{\sqrt{3}}, b - a = \frac{5}{13} - \frac{1}{2} = \frac{-3}{26}$olur. Arcsin $\frac{5}{13} \approx \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{13}$.

5a)Kapalı türev alma yöntemi ile: $\frac{d}{dx}(x^3 - 2xy + y^3) = \frac{d}{dx}(-1), 3x^2 - (2y + 2xy') + 3y^2y' = 0$ bulunur.

Buradan $y' = \frac{2y-3x^2}{3y^2-2x}$ elde edilir. $x = -1$ iken denklem $-1 + 2y + y^3 = -1$ yani $y(y^2 + 2) = 0$ şekline gelir, buradan $y = 0$ bulunur.

$y'(-1) = \frac{-3}{2}$ ve teğet denklemi $(y - 0) = \frac{-3}{2}(x - (-1))$ yani $y = \frac{-3}{2}x - \frac{3}{2}$ olur.

b)f nin a daki teğet denklemi $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ ve $-f$ nin a daki teğet denklemi $y = -f(a) - f'(a)(x - a)$ dır.

i) f, a da aşağı bükey olsun. O zaman a yı içeren bir açık aralıkta $f(x) \leq f(a) + f'(a)(x - a)$ olur. Her iki taraf -1 ile çarpılırsa (aynı aralıkta)

$-f(x) \geq -f(a) - f'(a)(x - a)$ olur, bu da $-f$ nin a da yukarı bükey olması demektir.

ii)f, a da yukarı bükey olsun. O zaman a yı içeren bir açık aralıkta $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$ olur. Her iki taraf -1 ile çarpılırsa (aynı aralıkta)

$-f(x) \leq -f(a) - f'(a)(x - a)$ olur, bu da $-f$ nin a da aşağı bükey olması demektir.