MT 131 FİNAL SINAVI (OCAK 2008) ÇÖZÜMLER

1. (a) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ olması (sonsuz limit tanımından) $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} = 0$ ve a yı içeren bir açık aralıkta (belki a hariç) $f(x) > 0$ olması demektir.

   i. ($L \neq 0$ olduğundan) Limit teoreminden $\lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{1}{f(x)} \lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = 0 \cdot \frac{1}{L} = 0$ olur.

   ii. $L > 0$ olduğundan, limitle ilgili ilk teoremden a sayısını içeren bir açık aralıkta (belki a hariç) $g(x) > 0$ olur. (Belki a hariç) $f(x)$ in ve $g(x)$ in pozitif olduğu açık aralıkların arakesiti de a yı içeren bir açık aralıktır ve bu açık aralıkta (belki a hariç) $f(x)g(x) > 0$ olur.

   Dolayısıyla $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$ olur.

   (b) $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+5}$, $f(x)$ her yerde türevlenebilirdir ve $f'(x)$ yalnızca $x = -\frac{1}{2}$ de 0 olur. $x = -\frac{1}{2}$ yegane kritik sayıdır. $f''(x) = \frac{-2x^2-2x+9}{(x^2+x+5)^2}$ ikinci türev de her yerde vardır ve yalnızca $x = \frac{-1\pm\sqrt{19}}{2}$ için 0 olur.

		$\frac{-1-\sqrt{19}}{2}$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{19}}{2}$	
$f'(x)$	$-$	|	$-$	|	$+$	|	$+$
$f''(x)$	$-$	|	$+$	|	$+$	|	$-$
Artanlık/Azalanlık	$\searrow$	|	$\searrow$	|	$\nearrow$	|	$\nearrow$
Bükeylik	$\frown$	|	$\smile$	|	$\smile$	|	$\frown$

   Her üç noktada da f türevlenebilir olduğundan, $x = -\frac{1}{2}$ de yerel minimum $x = \frac{-1\pm\sqrt{19}}{2}$ de büküm noktası vardır.

2. (a) $\lim_{x\to 0} \tanh^{-1} -x = \lim_{x\to 0} \operatorname{Arcsin} x - x = 0$ olduğundan $\frac{0}{0}$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1-x^2} - 1}{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1-x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\ (\sqrt{1-x^2}+1)}{x^2\sqrt{1-x^2}} = 2$$

   olduğundan, L'Hospital Kuralından, $\lim_{x\to 0} \frac{\tanh^{-1} x - x}{\operatorname{Arcsin} x - x} = 2$ olur.

   (b) ∞^0 belirsizliği vardır. $\ln((\tan x)^{\cos x}) = \cos x \ln(\tan x) = \frac{\ln(\tan x)}{\sec x}$ ∞/∞ belirsizliği var.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sec^2 x}{\tan x}}{\sec x \tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sec x}{\tan^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos x}{\sin^2 x} = 0$$

   L'Hospital kuralından $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\tan x)}{\sec x} = 0$ olur. e^x fonksiyonu 0 da sürekli olduğundan, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^{\cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} e^{\frac{\ln(\tan x)}{\sec x}} = e^0 = 1$ elde edilir.

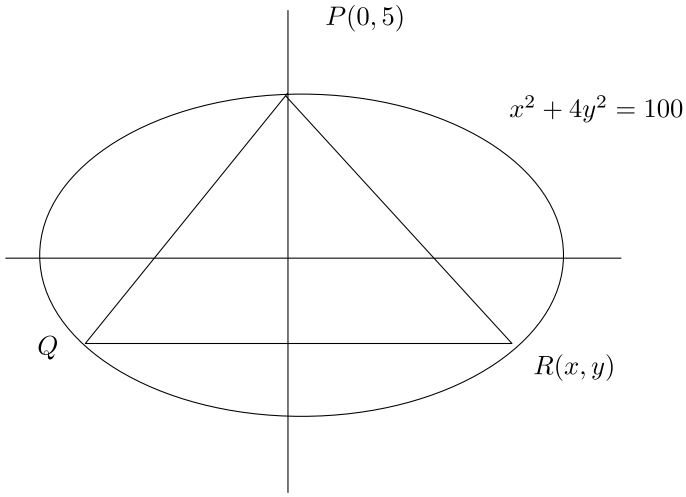
3. (a) $f(x) = \sinh x$, $a = 0$, $b = 1$ olsun. $f(x)$, $\mathbb{R}$ de istendiği kadar türevlenebilirdir. Kalanlı Taylor teoreminden $\sinh 1 = f(1) = P_3(1) + R_3$ olur. $P_3(x) = x + \frac{x^3}{6}$ ve (R_3 terimi yok sayılarak) $\sinh 1 \approx \frac{7}{6}$ olur. Bir $0 < c < 1$ için $R_3 = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1-0)^4 = \frac{\sinh c}{24}$ olur. $0 < \sinh c < \sinh 1 = \frac{e - \frac{1}{e}}{2} < \frac{e}{2} < \frac{3}{2}$ olduğundan Hata$=|R_3| = \frac{\sinh c}{24} < \frac{1}{16}$ olur.

   (b) $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \sinh x & n \text{ çift ise} \\ \cosh x & n \text{ tek ise} \end{cases}$ olur. Her $n \in \mathbb{N}$ ve $a = 0, b = 1$ için $f(x)$ kalanlı Taylor teoreminin koşulları sağlar. Öyleyse bir $0 < c < 1$ için $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} =$

$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ olur. $f^{(n+1)}(c) = \cosh c$ veya $\sinh c$ dir ve $0 < c < 1$ için $0 < \sinh c < \cosh c < \cosh 1 = \frac{e+\frac{1}{e}}{2} < \frac{7}{4}$ (son eşitsizlik $2 < e < 3$ olduğundan) bulunur. Buradan

$$\text{Hata} = |R_n| = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} < \frac{\frac{7}{4}}{(n+1)!} < \frac{2}{(n+1)!}$$

olduğu görülür. $n \geq 6$ için $(n+1)! \geq 5040$ dolayısıyla Hata$=|R_n| < \frac{2}{5040} < 10^{-3}$ olur.

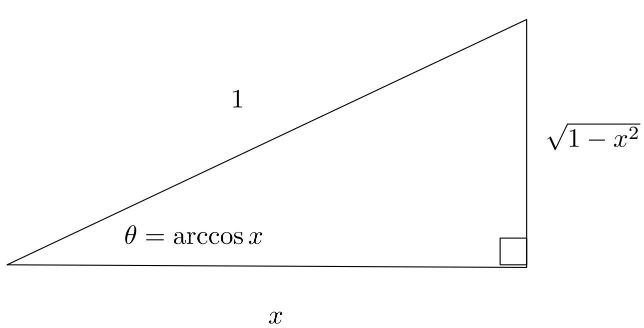


4.

y-ekseninin sağındaki köşe $R(x,y)$ olsun, $x > 0$ ve $-5 < y < 5$ olur.Koninin taban yarıçapı $r = x$ ve yüksekliği $h = 5 - y$ olur. $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ maksimum yapılacak. $V = \frac{\pi}{3}x^2(5-y)$ maksimum yapılacak. $R(x,y)$ elips üzerinde olduğundan $x^2+4y^2 = 100$ olmalıdır. Buradan $x^2 = 100 - 4y^2$ olur. Hacim formülünde yerine yazılırsa: $V = f(y) = \frac{\pi}{3}(4y^3 - 20y^2 - 100y + 500)$ maksimum yapılmalıdır. y değişkeni $(-5,5)$ aralığında olmalıdır. (Aslında $(-5,0]$ veya maksimum uçlarda olamayacağından,$[-5,5]$ veya $[-5,0]$ aralıklarından biri de alınabilir) $f'(y) = \frac{\pi}{3}(12y^2 - 40y - 100) = \frac{4\pi}{3}(3y^2 - 10y - 25) = 0$, kritik sayılar:$y = -\frac{5}{3}, 5$

	-5		$-\frac{5}{3}$		5
$f'(y)$		$+$		$-$	
Artan/Azalan		$\nearrow$		$\searrow$	

Tablodan görüldüğü gibi $f(y)$, $(-5,5)$ aralığında maksimum değerine $y = -\frac{5}{3}$ de erişir. $x = \sqrt{100-4y^2} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$, $R(\frac{20\sqrt{2}}{3}, -\frac{5}{3})$, $Q(-\frac{20\sqrt{2}}{3}, -\frac{5}{3})$ bulunur.



5. (a)

$0 \leq x < 1$ için yandaki şekilden $\cot(\text{Arccos}\, x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ olur. $-1 < x < 0$ için $\cot(\text{Arccos}(-x)) = \frac{-x}{\sqrt{1-(-x)^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}(*)$ olur. $\cos(\pi - x) = -\cos x$ (ve $0 \leq$

$\pi - \operatorname{Arccos} x \leq \pi$) olduğundan (her $-1 \leq x \leq 1$ için) $\operatorname{Arccos}(-x) = \pi - \operatorname{Arccos} x$ olur. Dolayısıyla $\cot(\operatorname{Arccos}(-x)) = \cot(\pi - \operatorname{Arccos} x) = -\cot(\operatorname{Arccos} x)$(**) olur. * ve ** dan ($-1$ lerin kısaltılması ile) $-1 < x < 0$ için de $\cot(\operatorname{Arccos} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ olur. (Veya, daha kısa olarak: $\operatorname{Arccos} x \in [0, \pi]$ olduğundan $\sin(\operatorname{Arccos} x) \geq 0$ olur. $(\cos(\operatorname{Arccos} x)^2 + (\sin(\operatorname{Arccos} x))^2 = 1$ oluşundan, $\sin(\operatorname{Arccos} x) = \sqrt{1 - (\cos(\operatorname{Arccos} x))^2} = \sqrt{1 - x^2}$ ve bunun sonucunda her $x \in (-1, 1)$ için $\cot(\operatorname{Arccos} x) = \frac{\cos(\operatorname{Arccos} x)}{\sin(\operatorname{Arccos} x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ elde edilir.)

(b) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$, $[-1, 8]$ aralığında süreklidir. $f(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(2 - 5x)$
Kritik sayılar:0 ve $\frac{2}{5}$ (her ikisi de bu aralıkta), Uçlar:-1 ve 8
$f(-1) = 2,\ f(0) = 0,\ f(\frac{2}{5}) = (\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}} - (\frac{2}{5})^{\frac{5}{3}},\ 0 < f(\frac{2}{5}) < (\frac{2}{5})^{\frac{2}{3}} < 1,\ f(8) = -28$
$M = f(-1) = 2,\ m = f(8) = -28$