Bazı fonksiyonlar için artanlığın kesin artanlığı gerektirmesi

Önerme 1 *I ve J iki aralık, $I \cap J \neq \emptyset$ ve bir f fonksiyonu, hem I aralığında hem de J aralığında kesin artan (bazan daima artan veya mutlak artan da deniyor) olsun. O zaman, ($I \cup J$ bir aralık olur ve) f fonksiyonu $I \cup J$ aralığında kesin artandır.*

İspat. $x_1 < x_2$ ve $x_1, x_2 \in I \cup J$ olsun.

1. $x_1,\ x_2 \in I$
2. $x_1,\ x_2 \in J$
3. $x_1 \in I,\ x_1 \notin J,\ x_2 \in J,\ x_2 \notin I$
4. $x_1 \in J,\ x_1 \notin I,\ x_2 \in I,\ x_2 \notin J$

durumlarından (sadece) biri doğru olur. Bu durumların her birinde $f(x_1) < f(x_2)$ olduğunu göstermeliyiz. 1 ve 2 durumunda iddiamız varsayımızdan hemen elde edilir. 3 ve 4 durumlarında ispat benzer olduğu için, bu durumlardan biri için iddianın doğruluğunu göstereceğiz. 3 durumunda gösterelim. $a \in I \cap J$ olsun (I ve J aralık olduğu için) $x_1 < a < x_2$ olmak zorundadır. f, I aralığında kesin artan olduğundan $f(x_1) < f(a)$ ve f, J aralığında kesin artan olduğundan $f(a) < f(x_2)$ olur. Bu eşitsizliklerden $f(x_1) < f(x_2)$ elde edilir.

■

Önerme 2 *I bir aralık ve f fonksiyonu bu aralıkta artan bir fonksiyon olsun. O zaman aşağıdakidakiler eşdeğerdir:*

1. *I nın **hiç bir alt aralığında** f sabit değildir.*
2. *f, I aralığında kesin artandır.*

İspat. Diğer yönü aşikar olduğundan yalnızca 1 doğru ise 2 nin de doğru olacağını göstereceğiz. f nin I aralığında kesin artan olmadığını varsayalım. Bir çift $x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$ sayıları için $f(x_1) \geq f(x_2)$ olur, ama f, I aralığında artan olduğu için $f(x_1) \leq f(x_2)$ olur. Bu ikisinden $f(x_1) = f(x_2)$ elde edilir. f, I aralığında artan olduğundan, $[x_1, x_2]$ aralığında f sabit olurdu. Çelişki.

■

Sonuç 1 *I bir aralık ve f fonksiyonu bu aralığın her iç noktasında türevlenebilir ve bu aralıkta sürekli olsun. Eğer I nın her iç noktasında $f'(x) \geq 0$ ve I nın* ***hiç bir alt aralığında*** *$f' \equiv 0$ (özdeş olarak sıfır, yani o aralığın her noktasında sıfır)* ***olmuyor*** *ise f, I aralığında kesin artandır.*

İspat. Ortalama Değer Teoreminin bir sonucu olarak f, I aralığında artandır. f, I aralığında kesin artan değilse bir önceki önermeden dolayı I nın bir alt aralığında f sabit olurdu ve aynı alt aralıkta $f'(x) = 0$ olduğu çelişkisi ortaya çıkardı. ■

Sonuç 2 *f bir* ***polinom*** *(veya* ***rasyonel fonksiyon*** *veya* ***cebirsel*** *veya en genel olarak* ***analitik fonksiyon****) olsun. Eğer f nin tanımlı olduğu bir I aralığında f sabit değil ve bu aralıktaki her x için $f'(x) \geq 0$ ise f, I aralığında kesin artandır. (Benzer şekilde: Eğer f nin tanımlı olduğu bir I aralığında f sabit değil ve bu aralıktaki her x için $f'(x) \leq 0$ ise f, I aralığında kesin azalandır.)*

İspat. Bir polinomun (veya rasyonel fonksiyon veya cebirsel veya analitik fonksiyon) türevi de bir polinomdur (veya rasyonel fonksiyon veya cebirsel veya analitik fonksiyon). Sabit olmayan bir polinomun (veya rasyonel fonksiyon veya cebirsel veya analitik fonksiyon) türevi (sabit) sıfır olmadığı için (türevinin) kökleri **ayrıktır**, dolayısıyla türevi hiç alt bir aralıkta sabit 0 olamaz. Bu nedenle, önceki sonuçtan, f, I aralığında kesin artandır. ■