

Tanım (Kapalı Kümeler): $A \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer $A^c = \mathbb{R} \setminus A$ bir açık küme ise A kümesi $\mathbb{R}$ nin bir kapalı alt kümesi dir.

Ör) $A = (-\infty, 1] \subseteq \mathbb{R}$ olsun

$A^c = \mathbb{R} \setminus A = (1, +\infty)$ $\mathbb{R}$ de açık bir küme
dolayısıyla $A = (-\infty, 1]$, $\mathbb{R}$ de kapalı bir kümedir.

ör) $\emptyset^c = \mathbb{R}$ açık $\Rightarrow \emptyset$, kapalı bir küme
 $\mathbb{R}^c = \emptyset$ açık $\Rightarrow \mathbb{R}$, kapalı bir kümedir.

ör) $A = [0, 1]$ olsun

$A^c = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ açık küme
dolayısıyla A kapalı bir kümedir.

ör) $A = [a, b]$ olsun

$A^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ açık küme
dolayısıyla $A = [a, b]$ kapalı bir kümedir.

Bütün kapalı ve sınırlı aralıklar
kapalı kümedir

ör) $A = \mathbb{Q}$ olsun

$$A^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^*$$

Dolayısıyla $A = \mathbb{Q}$ açık küme değil
kapalı bir küme değil

ör) $A = \mathbb{Q}^*$ olsun

$$A^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}$$

Dolayısıyla $A = \mathbb{Q}^*$ açık küme değil.
kapalı bir küme değil

ör) A sonlu bir küme olsun

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

sonlu bir küme

$\left(A \text{ nın elemanlarını küme içinde}$
 $\text{sıralayarak yazdığımızı düşünelim}$
 $a_1 < a_2 < \dots < a_n$

$$A^c = (-\infty, a_1) \cup (a_1, a_2) \cup (a_2, a_3) \dots \cup (a_{n-1}, a_n) \cup (a_n, +\infty)$$

açık küme dolayısıyla A kapalı kümedir.

(O halde sonlu kümeler kapalı kümeledir)

01) $A = \mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$

$A^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (n, n+1)$ açık kümedir

(herhangi sayıdan açık kümenin birleşimi)
açık küme

Dolayısıyla $A = \mathbb{Z}$ kapalı kümedir.

02) $A = \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$

$A^c = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3) \cup \dots$

açık kümenin bir birleşimi olup açık kümedir

Dolayısıyla $A = \mathbb{N}$ kapalı kümedir.

03) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi: dışa doğru

$\mathbb{R} \setminus A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right)$



$\mathbb{R} \setminus A$ açık küme değil!

$0 \in \mathbb{R} \setminus A$ ancak $(0-\varepsilon, 0+\varepsilon) \not\subset \mathbb{R} \setminus A$
v.s. bir $\varepsilon > 0$ yok.

Dolayısıyla $A = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$ kapalı küme değıl.

Örnek: $\emptyset \neq A$ üstten sınırlı bir küme line in
 $\sup A \notin A$

İspat: $\emptyset \neq A$ ve üstten sınırlı olduğundan
tanımlı altıyomundan $S = \sup A$ vardır

$S \notin A$ olduğunu göstereceğiz

varsayalım ki $S \in A$ olsun Bu durumda

A açık küme ve $S \in A$ olduğundan

$(S - \epsilon, S + \epsilon) \subseteq A$ o.s bir $\epsilon > 0$ vardır.

$$S + \frac{\epsilon}{2} \in (S - \epsilon, S + \epsilon) \subseteq A$$

Dolayısıyla $S + \frac{\epsilon}{2} \in A$ dir.

ancak $S = \sup A$ için Dolayısıyla her $a \in A$
 $S \geq a$ olur.

Dolayısıyla

$$S \geq S + \frac{\epsilon}{2} \text{ olur} \rightarrow \leftarrow$$

Not: Birer durum int içinde sayılabilir
yani A alttan sınırlı bir küme in
 $\inf A \notin A$ olur (siz kanıtlayın)

Örnek: $\emptyset \neq A$ üstten sınırlı kapalı bir küme ise
 $\sup A \in A$

Kanıt: $\emptyset \neq A$ ω alttan sınırlı olan tam bir
algebra üzerinde $s = \sup A$ var
varsayalım ki $s \notin A$ olsun

0 halde $s \in R \setminus A$ olur
ancak $R \setminus A$ açık ve $s \in R \setminus A$
olduğundan
 $(s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq R \setminus A$ o.s. bir $\epsilon > 0$ var.

0 halde $(s - \epsilon, s] \subseteq (s - \epsilon, s + \epsilon) \subseteq R \setminus A$

Yeni $(s - \epsilon, s] \subseteq R \setminus A$ olur $\left((s - \epsilon, s] \cap A \right) = \emptyset$

Bu in $s = \sup A$ olması ile
çelişir $\left(\begin{array}{l} \text{Açık} \\ s - \epsilon < a \leq s \quad \text{o.s. bir } a \in A \\ \text{vardır} \end{array} \right)$
Yeni $(s - \epsilon, s] \cap A \neq \emptyset$

Not: Benzer durum inf zinde geçerli yani
 A alttan sınırlı kapalı bir küme ise
 $\inf A \in A$ dir (Kanıt size görsün)

ör) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi: kapalı küme değildir

A alttan sınırlı bir küme $\inf A = 0$ ancak $0 \notin A$ Dolayısıyla A kapalı küme değildir

ör) $A = [0, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$ olsun A kapalı küme değildir.

A üstten sınırlı $\sup A = \sqrt{2} \notin A$ Dolayısıyla A kapalı küme değildir.

A açık küme de değildir

(Çünkü $\inf A = 0 \in A$)

Kapalı kümelerin özellikleri

1) $\emptyset, \mathbb{R}$ kapalı kümelerdir.

2) F_1, F_2 kapalı küme ise $F_1 \cup F_2$ kapalı

kümelerdir.

(Çünkü $(F_1 \cup F_2)^c = \overbrace{F_1^c}^{\text{Açık}} \cap \overbrace{F_2^c}^{\text{Açık}}$ açık $\Rightarrow F_1 \cup F_2$ kapalı
De Morgan

Timevarmla $F_1, F_2, \dots, F_n$ kapalı
kümelerdir.

$F_1 \cup \dots \cup F_n$ kapalı kümedir.

Yani sonlu sayıda kapalı kümenin
birleşimi yine kapalı kümedir. Ancak
sonsuz birleşim için aynı şeyi söyleyemeyiz:

3) Herhangi sayıda kapalı kümenin birleşimi
yine kapalı kümedir.

$\{F_i\}_{i \in I}$ kapalı kümelerin bir birleşimi

$$\left(\bigcap F_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} F_i^c \quad \text{aarch} \rightarrow \bigcap F_i \text{ kapalı.}$$

Herhangi sayıda kapalı kümenin birleşimi
kapalı küme olmayabilir.

YIĞILMA (LİMİT) NOKTASI

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer
her $\varepsilon > 0$ için
$$\underbrace{(c - \varepsilon, c + \varepsilon)} \cap A - \{c\} \neq \emptyset$$
 oluyor ise
 c sayısına A kümesinin bir yığılma noktası

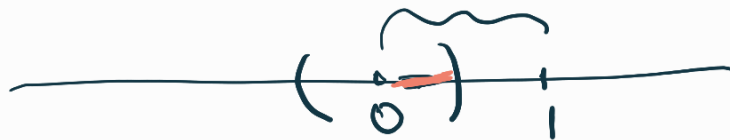
dir.

Uyarı: c , A kümesinin bir yığılma noktası in
 c , A kümesinin bir elemanı olmayabilir.

Ör) $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi den
 $c = \sqrt{2}$, $A = \mathbb{Q}$ kümesinin bir yığılma
noktasıdır.

her $\varepsilon > 0$ için
 $(\sqrt{2} - \varepsilon, \sqrt{2} + \varepsilon) \cap \mathbb{Q} - \{\sqrt{2}\} \neq \emptyset$
olup $\sqrt{2}$, $A = \mathbb{Q}$ kümesinin bir yığılma
noktasıdır.

ör) $A = (0, 1)$ $c = 0$ A kümesinin
bir yığılma noktasıdır.



her $\varepsilon > 0$ için

$$(0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) \cap A - \{0\} \neq \emptyset$$

$c = 1$ sayıdır $A = (0, 1)$ kümesinin bir
yığılma noktası

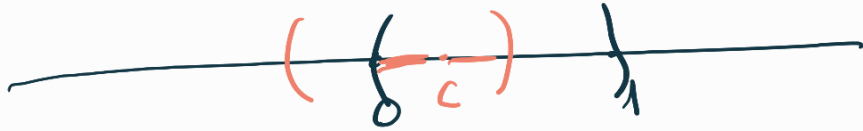


her $\varepsilon > 0$ için

$$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \cap (0,1) - \{1\} \neq \emptyset$$

$$A = (0,1) \quad c \in A = (0,1) \text{ olan}$$

c , $A = (0,1)$ kumesinin bir yığılması
olduğudur.



$$\text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } (c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap A - \{c\} \neq \emptyset$$

Ö) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ olan $c=0$ A kumesinin
bir yığılması olduğıdır:

her $\varepsilon > 0$ için δ sınırlı

Prasibinden

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

o. $n_0 \in \mathbb{N}$ var.

$$\frac{1}{n_0} \in (0, \varepsilon) \subset (-\varepsilon, +\varepsilon)$$

$$\frac{1}{n_0} \in A$$

$$\frac{1}{n_0} \neq 0$$

$$\text{Dolayısıyla } \frac{1}{n_0} \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap A - \{0\}$$

Gösterin: A kümesinin tam yığılma noktalarında oluşan küneyi A' ile gösterin.

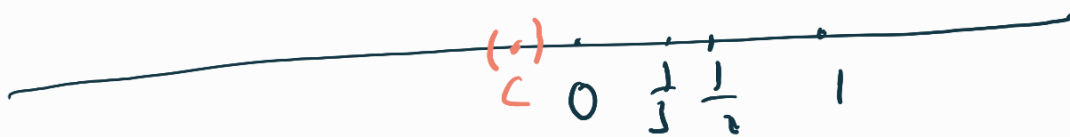
Ör) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$ $A' = ?$

Cor: $0 \in A'$ olduğun bir önceki örnekte görüldü.

$$A = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}$$



I. den $c < 0$ in $c \notin A'$



çünkü her bir $\varepsilon > 0$ vardır gibi

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A = \emptyset \text{ olur}$$

$$c \notin A'$$

II. den: $c > 1$ $c \notin A'$



çünkü her bir $\varepsilon > 0$ vardır gibi

$$(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap A = \emptyset$$

III. d.h.m. : $\frac{1}{n} \notin A'$ für $n \in \mathbb{N}$ im



$$\varepsilon = \min \left\{ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right\}$$

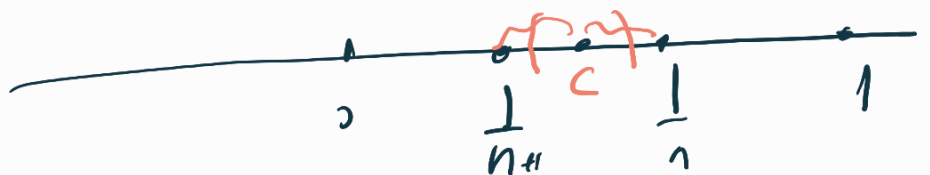
$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon \right) \cap A = \left\{ \frac{1}{n} \right\}$$

$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon, \frac{1}{n} + \varepsilon \right) \cap A - \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \emptyset$$

Daher gilt $\frac{1}{n} \notin A', \forall n$

IV. d.h.m. $\alpha < 1$

$$\frac{1}{n+1} < c < \frac{1}{n} \quad \text{u. s. } n \in \mathbb{N} \text{ für}$$



$$\varepsilon = \min \left\{ c - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} - c \right\} > 0 \quad \text{obwohl absolut}$$

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap A = \emptyset \text{ olup } c \notin A'$$

$$\text{0 holds } A' = \{0\}$$

o/ $A = \mathbb{Q}$ rasgele sayılar kümesi

$$A' = \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$$

$$c \in \mathbb{R} \Rightarrow c \in \mathbb{Q}'$$

(Çünkü her $\varepsilon > 0$
 $\mathbb{Z}$ için
 $(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap \mathbb{Q} - \{c\} \neq \emptyset$
 $\mathbb{Q}$ nun yoğunluğu)

aynı şekilde

$A = \mathbb{Q}^*$ irrasyonel sayılar kümesi

$$A' = \mathbb{R} \text{ dir.}$$

(Ayrıca $A \subseteq \mathbb{R}$ ve A yoğun ise)
 $A' = \mathbb{R}$ dir.