

Teorem (ik-ıce aralıklar teoremi): $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

kapalı ve sınırlı $\mathbb{R}$ -ıce aralıkların birleşimi
ise

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \quad \text{olur}$$

$$\text{ve } \inf \{l(I_n) : n \in \mathbb{N}\} = 0 \quad \text{im}$$

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{z\} \quad (\text{tek nokta kümesi})$$

$$\left(\begin{array}{l} l(I_n) : I_n \text{ aralığının uzunluğu} \\ I_n = [a_n, b_n] \quad \text{im} \quad l(I_n) = b_n - a_n \end{array} \right) \quad \text{yani}$$

Kanıt: $\forall n \in \mathbb{N}$ için $I_n = [\underline{a_n}, b_n]$
ve $\{I_n\}$ $\mathbb{R}$ -ıce aralıkların bir

leşimi olsun yani

$$\dots \subset \underline{I_{n+1}} \subset \underline{I_{n+1}} \subset \underline{I_n} \subset \dots \subset \underline{I_1} = [a_1, b_1]$$

$$\emptyset \neq A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \quad \text{kümesinin dışarıdan}$$

herhangi bir $\underline{a_n} \in A$ alsak $(a_n, I_n = [a_n, b_n] \text{ ağırlığı})$
sıfır ve noktası

$$I_n = [a_n, b_n] \subset \dots \subset \underline{I_1} = [a_1, b_1]$$

$$a_n \in I_n \subset \dots \subseteq J, = [a, b]$$

$$a_1 \leq a_n \leq b_1 \quad \text{Doğruysa } b_1$$

A kümesinin bir üst sınırı olup A
içinden sınırlı bir kümedir. O halde
tanımlı altyapılarından

$$z = \sup A \quad \text{vardır.}$$

İddia: $z \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap [a_n, b_n]$ dir.

yani her $n \in \mathbb{N}$ için $z \in I_n = [a_n, b_n]$

ya da $a_n \leq z \leq b_n$ olduğunu göstereceğiz.

$$z = \sup A = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ idi } \quad \text{O halde}$$

$$\underline{a_n \leq z} \quad \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

O halde

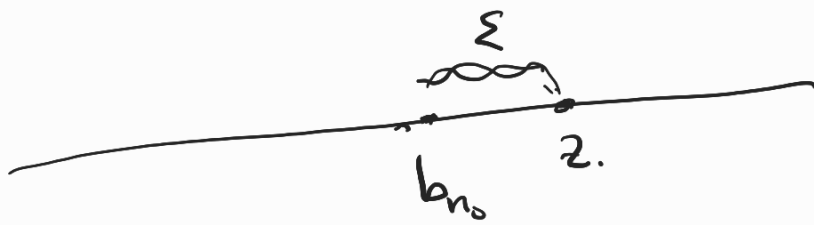
$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } \underline{z \leq b_n} \text{ olduğunu}$$

göstermek yeterli varsayalım ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$z \leq b_n \text{ doğru olmasın } \quad \text{O zaman}$$

$$z > b_{n_0} \quad \text{o.ş. bir } n_0 \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

$$I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$$



$$\epsilon = z - b_{n_0} > 0 \quad \text{olarak alalım}$$

$z = \sup A$ idi

$$\underline{z - \epsilon < a_{m_0} \leq z} \quad \text{ö.z. } a_{m_0} \in A \text{ var.}$$

$$I_{m_0} = [a_{m_0}, b_{m_0}]$$

Şimdi $\underline{m_0 \geq n_0}$ veya $\underline{m_0 < n_0}$ olabilir.

Eğer $m_0 \geq n_0$ olsa

olur.

$$\underline{I_{m_0} = [a_{m_0}, b_{m_0}] \subset I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]}$$

$$z - \epsilon < a_{m_0} \leq z \Rightarrow \underbrace{z - (z - b_{n_0})}_{b_{n_0}} < a_{m_0} \leq z$$

o halde

$b_{n_0} < a_{m_0}$ olur. Bu ise bir çelişki.

$$\left(\text{Çünkü } a_{m_0} \in I_{m_0} \subset I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}] \right)$$

$$a_{n_0} \leq a_{m_0} < b_{n_0}$$

o halde $m_0 \geq n_0$ olamaz
 Dolayısıyla $m_0 < n_0$ olur
 Ancak bu durumda

$$I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}] \subsetneq I_{m_0} = [a_{m_0}, b_{m_0}]$$

$$\underbrace{z - \varepsilon}_{b_n} < a_{m_0} \leq z \Rightarrow b_{n_0} < a_{m_0} < z$$

Bu da bir çelişki

$$\left(\begin{array}{l} \text{Ancak } b_{n_0} \in I_{n_0} \subsetneq I_{m_0} = [a_{m_0}, b_{m_0}] \\ a_{m_0} < b_{n_0} \leq b_{m_0} \text{ olur} \end{array} \right)$$

Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $z \leq b_n$ dir
 $z \in \bigcap I_n = \bigcap [a_n, b_n]$ dir.

$$l(I_n) = b_n - a_n$$

varsayalım ki

$$\inf \{ l(I_n) : n \in \mathbb{N} \} = 0 \text{ olsun yani}$$

$$\inf \{ b_n - a_n : n \in \mathbb{N} \} = 0 \text{ olsun.}$$

$\bigcap I_n \neq \emptyset$ oldugu sistem, $\Rightarrow$ tek

$\bigcap I_n$ kimsenin tek white kimsesi
oldugu gösterelim

varsayalım ki $z_1, z_2 \in \bigcap I_n$

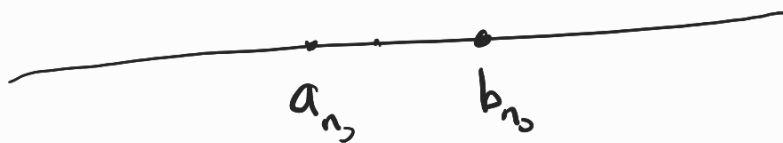
$0 < |z_1 - z_2|$ olur

$\varepsilon > 0$ yeterli alalım

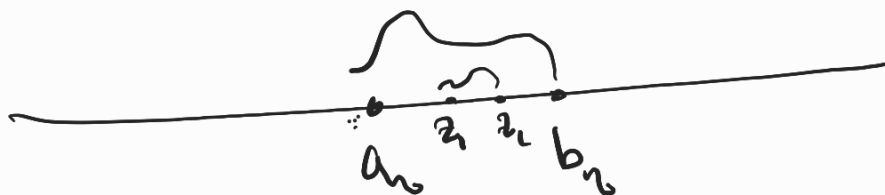
$\inf \{ l(I_n) = b_n - a_n : n \in \mathbb{N} \} = 0$ olduğundan

$0 < l(I_{n_0}) \leq 0 + \varepsilon$ o.ş ki $n_0 \in \mathbb{N}$ var

$$I_{n_0} = [a_{n_0}, b_{n_0}]$$



$$z_1, z_2 \in \bigcap I_n \Rightarrow z_1, z_2 \in I_{n_0}$$



$$0 < |z_1 - z_2| \leq b_{n_0} - a_{n_0} = l(I_{n_0}) < \varepsilon$$

0 lada her $\varepsilon > 0$ için

$$0 \leq \underbrace{|z_1 - z_2|} < \varepsilon \quad \text{Dolayısıyla}$$

$$|z_1 - z_2| = 0 \Rightarrow z_1 = z_2 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla $\bigcap I_n = \{z\}$ olur.

$\mathbb{R}$ 'nin Topolojisi

Tanım: $x_0 \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ olsun

$$V_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \text{ aralığına}$$

x_0 in ε -komsalığıdır.

$$a) \quad V_{\frac{1}{2}}(1) = \left(1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \quad \begin{matrix} x_0 = 1 \text{ in} \\ \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ boyutunda} \end{matrix}$$

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ olsun Eğer

$$\text{her } \underline{x \in A} \text{ için } V_{\varepsilon_x}(x) = \underbrace{(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x)} \subseteq A$$

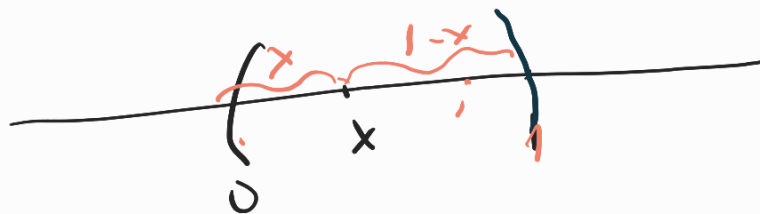
o.s her $\varepsilon_x > 0$ varsa A kümesine

$\mathbb{R}$ nin bir açık alt kümesi dir.

(Yeni A kümesi, eski her elemanının bir
kapsadığını gösterir in A kümesi
R'nin bir alt kümesi dir)

2) R, R de ayni bir kümedir
 $x \in R$ alalım her $\varepsilon > 0$ için
 $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq R$
x in 1 kısıtı

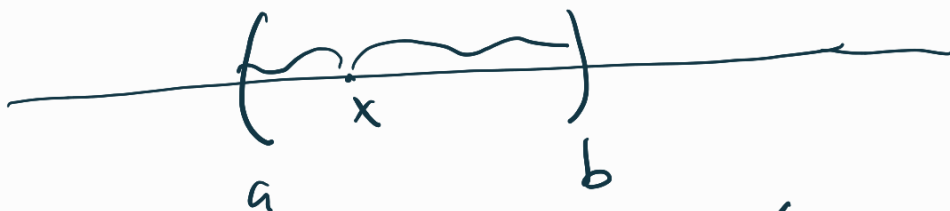
3) $A = (0, 1)$ R de bir ayni kümedir.



$x \in (0, 1)$ in $\varepsilon = \min\{x, 1-x\}$ olarak

$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (0, 1) = A$ olur.

4) (a, b) ayni aralığı R de ayni kümedir



$x \in (a, b)$ $\varepsilon = \min\{x-a, b-x\}$ olarak
 $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq (a, b)$

Ancak $\mathbb{R}$ de açık kümeler sadece açık
craklıklardan ibaret değildir

örneğin $A = (0,1) \cup (2,3)$ $\mathbb{R}$ de

bir açık kümedir (ancak açık craklı değildir)

$$x \in A = \underbrace{(0,1)} \cup \underbrace{(2,3)} \text{ olsun}$$



$$x \in (0,1) \Rightarrow \varepsilon = \min\{x, 1-x\}$$

$$x \in (2,3) \Rightarrow \varepsilon = \min\{x-2, 3-x\}$$

alır sak $\sqrt{\varepsilon}(x) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A = (0,1) \cup (2,3)$

ör) $A = (0,1) \cup \{2\}$ $\mathbb{R}$ de açık küre
değildir.

$2 \in A$ ancak A kümesi 2 nin
hiz bir komşuluğu içermez



$$(2-\varepsilon, 2+\varepsilon) \not\subset A = (0,1) \cup \{2\}$$

o. > $\varepsilon > 0$ için

ör) $A = [0, 1)$ $\mathbb{R}$ de açık bir
kümeye değıl

$$0 \in A \text{ ancak}$$

$$V_{\varepsilon}(0) = (0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq A = [0, 1)$$

oysa bir $\varepsilon > 0$ yok

ör) $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi.
 $\mathbb{R}$ nin açık alt kümesi değıldir.

$$x \in \mathbb{Q} \text{ alalım}$$

$$V_{\varepsilon}(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}$$

oysa her $\varepsilon > 0$ için
ne olursa olsun $x - \varepsilon < q^* < x + \varepsilon$ oysa $q^* \in \mathbb{Q}^*$

ve

ör) $A = \mathbb{Q}^*$ rasyonel sayılar kümesi.
 $\mathbb{R}$ nin açık alt kümesi değıldir.

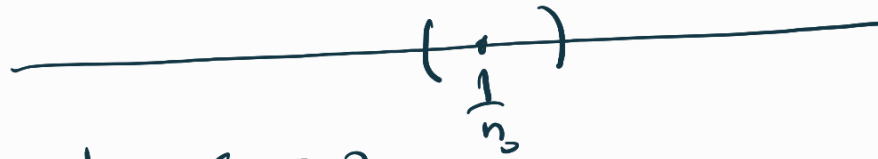
$$x \in A = \mathbb{Q}^* \text{ in}$$

$$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq \mathbb{Q}^* \text{ oysa } \varepsilon > 0 \text{ yok}$$

(her $\varepsilon > 0$ ne olursa olsun $x - \varepsilon < y < x + \varepsilon$ oysa
bir $y \in \mathbb{Q}$ var)

01) $A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \subset \mathbb{R}$ nin açık alt
kümesi değildir.

$$x = \frac{1}{n_0} \in A \text{ alalım}$$



her $\epsilon > 0$ için $V_{x_0}(\epsilon) = \left(\frac{1}{n_0} - \epsilon, \frac{1}{n_0} + \epsilon \right)$ aralığı $\mathbb{R}$ içinde
 A ya ait olmayan sayılar vardır (negatif
 sayılar da olabilir) $\mathbb{R}$ sayı sistemi
 $V_{x_0}(\epsilon) = \left(\frac{1}{n_0} - \epsilon, \frac{1}{n_0} + \epsilon \right) \not\subseteq A$ o.ş $\epsilon > 0$ için

Açık Kümelerin Özellikleri:

- i) $\emptyset \subset \mathbb{R}$ açık kümedir
- ii) $U, V \subset \mathbb{R}$ de açık küme ise $U \cup V$
 $\mathbb{R}$ de açık kümedir.
- iii) $\{U_i\}_{i \in \mathbb{I}}$ $\mathbb{R}$ de açık kümelerin her bir
 bir ailesi için $U = \bigcup U_i$ $\mathbb{R}$ de
 açık kümedir.

Kerol: i) $\emptyset$ m aach lare oldip
kabal edikech

R m aach oldip gsteildi

ii) $U \cup V$ R de aach lare
dun

$U \cap V = \emptyset$ m $\emptyset$ aach lare

$U \cap V \neq \emptyset$ dann

$x \in U \cap V$ $\begin{cases} x \in U \xrightarrow{U \text{ aach}} (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subseteq U \\ x \in V \xrightarrow{V \text{ aach}} (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq V \end{cases}$

$$\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) = (x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \cap (x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2) \subseteq U \cap V$$

$\Rightarrow U \cap V$ aach lare

Tanemula $U_1, \dots, U_n$ R de
aach lare m

$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$ R de aach
lare oldip gsteilebilu.

iii) $\{U_i\}_{i \in I}$ denklemler halinde, bir
ader.

$$U = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{olsun.}$$

$$x \in U = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{in } x \in U_{i_0} \text{ a } i_0 \in I \text{ var}$$

U_{i_0} denklemler $x \in U_{i_0}$ olmaktadır

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U_{i_0} \quad \text{a } \exists \text{ bir } \epsilon > 0 \text{ var}$$

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \subseteq U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i = U$$

Dolayısıyla U denklemler denklemler.

Not:

Theorem: R denklemler denklemler sayılabilir
sayılabilir ilave-ileve ayırık denklemler
birleşimi denklemler denklemler.