

Theorem: $\sqrt{2}=2$ $\mathbb{Q}$ 'da bir say vardır.

İspat: $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 < 2\}$ olarak

tanımlayalım

$$A \neq \emptyset$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Örneğin } 1^2 = 1 < 2 \\ 1 \in A \end{array} \right)$$

Öte yandan

$$x \geq 2 \text{ ise } x^2 \geq 4 > 2$$

$$\text{Dolayısıyla } \underbrace{x \geq 2}_p \Rightarrow \underbrace{x \notin A}_q$$

$$\equiv \underline{x \in A} \Rightarrow x < 2$$

Dolayısıyla her $x \in A$ için $x < 2$
olup 2 , A kümesinin bir üst sınırıdır

Dolayısıyla A , $\mathbb{R}$ 'nin üstten sınırlı bir
alt kümesidir. olup $\mathbb{R}$ 'nin tamlık aksiyomunu

gerekçe:
 $s = \sup A$ vardır.

İddia:

$$\boxed{S^2 = 2}$$

Bu iddiayı kanıtlamak $S^2 - 2 = 0$ olduğun göstermek gerekecek

$S^2 - 2 \in \mathbb{R}$ ve $\mathbb{R}$ 'nin içinde olduğunu

$S^2 - 2 > 0$, $\boxed{S^2 - 2 = 0}$ veya $S^2 - 2 < 0$ durumlarından biri sağlanacak.

$S^2 - 2 > 0$ veya $S^2 - 2 < 0$ durumlarının olmayacağını gösterirsek $S^2 - 2 = 0$ yani $S^2 = 2$ olduğu sonucuna varırız.

0 halde $S^2 > 2$ veya $S^2 < 2$ durumlarının olmayacağını göstereceğiz.

Önce $S^2 > 2$ olmayacağını gösterelim

Olmayana ergi (cheliski) yöntemi ile gösterelim
varsayalım ki $S^2 > 2$ olsun.

Eğer $\underline{S^2 > 2}$ varsayarsam

$$\underline{\left(S - \frac{1}{n_0}\right)^2 > 2} \quad \text{ö.z.} \quad \text{bi } \underline{n_0 \in \mathbb{N}}$$

olduğunu göstereceğim. Bu durumda

$s - \frac{1}{n_0}$, A kümesinin bir üst sınırı
olur. ancak $s = \sup A$ idi
 $s \leq s - \frac{1}{n_0}$ olmaz $\rightarrow \leftarrow$

Bunu gösterelim

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 - \frac{2s}{n} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_0 > s^2 - \frac{2s}{n}$$

$$\left(s - \frac{1}{n}\right)^2 > s^2 - \frac{1}{n} \cdot 2s$$

$$s^2 > 2 \quad \text{varsayarsak}$$

o zaman $s^2 - 2 > 0$

$$\frac{s^2 - 2}{2s} > 0$$

Ayrıca Presibinden

$$\frac{s^2 - 2}{2s} > \frac{1}{n_0}$$

o.z bir $n \in \mathbb{N}$
var.

Buradan

$$s^2 - 2 > \frac{2s}{n_0}$$

Buradan

$$2 - s^2 < -\frac{2s}{n_0}$$

pozitifliği s^2 elbette

$$2 - s^2 + s^2 = 2 < s^2 - \frac{2s}{n_0} \quad \text{olur.}$$

0 halde

$$\left(s - \frac{1}{n_0}\right)^2 > s^2 - \frac{2s}{n_0} > 2$$

0 halde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için

$$\left(s - \frac{1}{n_0}\right)^2 > 2 \quad \text{olup Bu'nun}$$

$s - \frac{1}{n_0}$ A kümesinin bir üst sınırı
olduğu söyler ancak $s = \sup A$ idi

Böylelikle

$$s \leq s - \frac{1}{n_0}$$

Bu'nun

bir çelişkidir. Yani

$$s^2 > 2 \quad \text{olamaz.}$$

Şimdi $s^2 < 2$ olamayacağını gösterelim

varsayalım ki $s^2 < 2$ olsun Bu durumda

$\left(s + \frac{1}{n_0}\right)^2 < 2$ o.ş bir $n_0 \in \mathbb{N}$ olduğu
göstereceğiz. Bu durumda $s + \frac{1}{n_0} \in A$ olur

Aralık $S = \sup A$ idi $\Rightarrow$ luylyk
 $S + \frac{1}{n_0} \leq S$ olur Bu ise hı celskiler.

Bunu gsmek i2.4

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 = s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n^2} < s^2 + \frac{2s}{n} + \frac{1}{n}$$

yeni

$$\left(s + \frac{1}{n}\right)^2 < \underbrace{s^2 + \frac{1}{n}(2s+1)} \quad \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ i2in}$$

$$\left(s + \frac{1}{n_0}\right)^2 < s^2 + \frac{1}{n_0}(2s+1)$$

$s^2 < 2$ varsaymstik

yeni $0 < 2 - s^2$ varsaymstik

$$0 < \frac{2 - s^2}{2s+1}$$

Arşmed prensibine

$$\frac{1}{n_0} < \frac{2 - s^2}{2s+1} \quad \text{o.2 bir } n_0 \in \mathbb{N} \text{ var}$$

yeni

$$\frac{2s+1}{n_0} < 2 - s^2$$

$$\left(s + \frac{1}{n_s}\right)^2 < s^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{n_s}\right)^2}_{2-s^2} < s^2 + 2 - s^2 = 2$$

Yani $\left(s + \frac{1}{n_s}\right)^2 < 2$ o.ş bir $n \in \mathbb{N}$ var
 Bu durumda $s + \frac{1}{n_s} \in A$ olur

$s = \sup A$ idi Dolayısıyla
 $s + \frac{1}{n} < s$ olur Bu ise bir
 çelişkidir. $n \rightarrow 0$ halde $s^2 < 2$ olamaz

Dolayısıyla $s^2 = 2$ olmalı

Daha önce $s^2 = 2$ o.ş bir sayının
 rasyonel olamayacağını görmüştük
 Dolayısıyla

$s^2 = 2$ o.ş s 70 sayısı
 bir rasyonel sayı değildir. Bu sayı
 $s = \sqrt{2}$ ile göstreceğiz

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ olsun

Eğer $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ in

$x < a < y$ o.ş. bir $a \in A$ varsa
A kümesinde $\mathbb{R}$ nin bir yoğun alt kümesi
dir.

Örnek: $A = \mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi:

$\mathbb{R}$ nin bir yoğun alt kümesidir.

İspat: $x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ olsun

$x < q < y$ o.ş. bir $q \in \mathbb{Q}$ olduğunu
göstereceğiz

$$x < y \Rightarrow 0 < \underline{y-x} \quad \text{olur.}$$

$$0 < \underline{1}$$

$$n_0(y-x) > 1 \quad \text{o.ş. bir } n_0 \in \mathbb{N} \text{ olur}$$

Yani

$$n_0 y - n_0 x > 1 \quad \text{yani}$$

$$\underline{n_0 x + 1} < \underline{n_0 y} \quad \text{o.ş. bir } n_0 \in \mathbb{N} \text{ olur}$$

Öte yandan

$$n_0 x \in \mathbb{R}$$

$$m-1 \leq \underline{n_0 x} < m \quad \text{v.s.} \quad \text{biri } m \in \mathbb{Z} \text{ var}$$

0 halde

$$n_0 x < m \leq n_0 x + 1 < n_0 y$$

$$n_0 x < m < n_0 y$$

$$\begin{array}{l} m \in \mathbb{Z} \\ n_0 \in \mathbb{N} \end{array}$$

Burada

$$x < \underbrace{\frac{m}{n_0}}_{\in \mathbb{Q}} < y \quad \text{elde edilir.}$$

Aslında

(ör) $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ farklıdır
her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n) \geq n$ olsun

$$A = \left\{ \frac{m}{\varphi(n)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{olarak tanımlayalım}$$

$A, \mathbb{R}$ nm biri yığın alt kümesidir.

Ans:

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \text{u} \quad x < y \quad \text{obm}$$

$$0 < y - x$$

$$0 < 1$$

Archimed. Prinzipien

$$n_0(y-x) > 1$$

$\Rightarrow$ br $n_0 \in \mathbb{N}$ var

$$\varphi(n_0) > n_0 \quad \text{di}$$

$$\varphi(n_0)(y-x) > n_0(y-x) > 1$$

$$\varphi(n_0)y - \varphi(n_0)x > 1$$

ym:

$$\varphi(n_0)y > \varphi(n_0)x + 1 \quad \text{elke edlir.}$$

$$\varphi(n_0)x \in \mathbb{R}$$

Archimed. Stetigkeit

$$m-1 \leq \varphi(n_0)x < m \quad \text{o.s. } m \in \mathbb{Z} \text{ u}$$

$$\varphi(n_0)x < m \leq \varphi(n_0)x + 1 < \varphi(n_0)y$$

$$\varphi(n_0)x < m < \varphi(n_0)y$$

$$m \in \mathbb{Z} \\ n_0 \in \mathbb{N}$$

$$x < \frac{m}{\varphi(n_0)} < y$$

$\in \mathbb{A}$

ör $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ $\varphi(n) = 2^n$ alalım

her $n \in \mathbb{N}$ için $\varphi(n) = 2^n > n$

$$A = \left\{ \frac{m}{\varphi(n)} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}, \mathbb{R} \text{ nın}$$

(teoremlerle
gösterilebilir)

yoğun alt kümesiymiş

$$A = \left\{ \frac{m}{2^n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\} \mathbb{R} \text{ nın}$$

bir yoğun alt kümesidir.

Ö.) $\sqrt{2}$ rasyonel olmayan bir sayı
rasyonel olmayan sayılar irasyonel sayılar
dışında ve irasyonel sayılar kümesinde
 $\mathbb{Q}^*$ ile gösterelim ($\sqrt{2} \in \mathbb{Q}^*$)

$\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$ de yoğun dur.

$x, y \in \mathbb{R}$ ve $x < y$ olsun

$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\sqrt{2}$ nın carpmaya göre
tersi

$x < y$ idi Dolayısıyla

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} x}_{\in \mathbb{Q}} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} y}_{\in \mathbb{R}} \text{ olur.}$$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ nm $\forall$ $q \in \mathbb{Q}$ alt lineer olduğundan

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} x}_{\in \mathbb{Q}} < \overset{-10}{q} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} y}_{\in \mathbb{Q}} \text{ o.s. } \forall q \in \mathbb{Q} - \{0\} \text{ vardır.}$$

Burada $\sqrt{2}$ ile $\mathbb{Q}$ arasında

$$x < q\sqrt{2} < y \text{ elde edilir.}$$

$$q \in \mathbb{Q} - \{0\}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

$q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ olsa q nm $\mathbb{Q}$ içinde
göre $\frac{1}{q}$ da rasyonel olacağından

$$\sqrt{2} = \underbrace{\frac{1}{q}}_{\in \mathbb{Q}} \underbrace{q\sqrt{2}}_{\in \mathbb{Q}} \in \mathbb{Q} \rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

İç-İçe Aralıklar Prensipli

Tanım: her $n \in \mathbb{N}$ için I_n , $\mathbb{R}$ de bir aralık

ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$I_{n+1} \subseteq I_n \text{ olsun yani}$$

$$\dots \subset I_3 \subseteq I_2 \subseteq I_1 \text{ den}$$

$\{I_n\}$ aralıkların diziye itirazı
aralıklar diziye devir.

Ö1) $I_n = (n, +\infty)$ $\{I_n\}$ iç-içe aralıklar dizisidir.

$$I_1 = (1, +\infty)$$

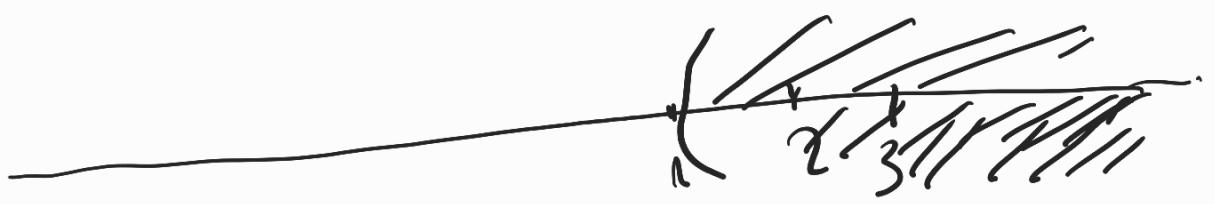
$$I_2 = (2, +\infty) \subset I_1$$

$$I_3 = (3, +\infty) \subseteq I_2 \subseteq I_1$$

⋮

her $n \in \mathbb{N}$ için

$$I_{n+1} \subseteq I_n$$



$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, +\infty) = \emptyset$$

$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (n, +\infty)$ olduğunu varsayalım

0 halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$x > n$ Ben x mümkün
değil. Arasındaki parabolün $x < n_x$ as
her $n_x \in \mathbb{N}$ vardır.

Ör) $I_n = (0, \frac{1}{n})$, $n \in \mathbb{N}$ $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
in-ice analıklardan bir dizi:

$$I_1 = (0, 1)$$

$$I_2 = (0, \frac{1}{2}) \subset I_1$$

$$I_3 = (0, \frac{1}{3}) \subset I_2 \subset I_1$$

$$\vdots$$

$$I_{n+1} = (0, \frac{1}{n+1}) \subset I_n = (0, \frac{1}{n}), \forall n$$

$$\dots \subset I_{n+1} \subset I_n \subset \dots \subset I_2 \subset I_1$$

