

R'nin Tamamlayıcı Özelliği

Aksiyyom: $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Eğer A üstten sınırlı, bir küme ise A kümesinin bir en küçük üst sınırı (yani $\sup A$) vardır.

Bu kabul edilen özellikler R 'nin tamamlanabilirliği demektir.

Teorem: $\emptyset \neq A \subseteq R$ ve A alttan sınırlı, bir küme ise $t = \inf A$ vardır.

İspat: $\emptyset \neq A \subseteq R$ ve alttan sınırlı olan $\emptyset$ halinde $\exists t \in R$ s.t. her $x \in A$ için $t \leq x$ olur.

$$-A = \{-x : x \in A\}$$

$\emptyset$ halinde

her $x \in A$ için $t \leq x$ olduğundan

$-t \geq \textcircled{-x}$ olur. Dolayısıyla $-t, -A$

kümesinin bir üst sınırı olur. Bu başka

ifade ile $-A$ kümesi $\mathbb{R}$ nin boş küme

değil. İsterse sıralı bir alt kümesidir.

Dolayısıyla $\mathbb{R}$ nin tamlik özelliği (ahsyan)

$s = \sup(-A)$ vardır.

$s = \sup(-A) \Rightarrow -s = \inf A$ olur.

Dolayısıyla $\inf A$ vardır.

Not: $\mathbb{R}$ tamlik özelliğe sahip (yani
bu aksiyomu koyabileceğiniz) yegane sıralı
cisimdir.

$\mathbb{R}$ nin Tamlik Özelliğinin bazı sonuçları

Teorem (Arşimed Özelliği): Her $x \in \mathbb{R}$ için
 $x < n_x$ 0.8 bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır.

İspat: Olmayana ergi methodu ile kanıt yapacağız
varsayalım ki hipotet yanlış olsun

Bu durumda bir $x \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki
bu x sayısından daha büyük bir doğal
sayı yoktur.

Bir başka ifade ile x , bütün doğal sayılardan büyük veya eşittir yani:

$$x \geq n \quad \text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

Bu durumda bu x sayısı $\mathbb{N}$ kümesinin bir üst sınırı olur. $\mathbb{R}$ 'nin tamlik özelliğinden $\mathbb{N}$ 'nin bir en küçük üst sınırı vardır yani $\sup \mathbb{N}$ vardır

$$s = \sup \mathbb{N} \text{ diyelim. } (s \in \mathbb{R})$$

$$s = \sup \mathbb{N} \quad \text{her } \varepsilon > 0 \text{ için}$$

$$s - \varepsilon < n_0 \leq s \quad \text{o.s. bir } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

Özel olarak $\varepsilon = 1$ al

$$\underline{s - 1 < n_0 \leq s} \quad \text{o.s. bir } n_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}$$

$$s - 1 < n_0 \Rightarrow s < \underbrace{n_0 + 1}_{\in \mathbb{N}} \quad \rightarrow \leftarrow$$

$s = \sup \mathbb{N}$ olması ile çelişir.

O halde hipotezimiz doğrudur yani
her $x \in \mathbb{R}$ için $x < n_x$ o.s. bir $n_x \in \mathbb{N}$ vardır.

Sonuç: $y, z \in \mathbb{R} \quad y, z > 0$

a) $z < ny$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

b) $\frac{1}{n} < y$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır

c) $n-1 \leq z < n$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır

d) her $x \in \mathbb{R}$ için $m-1 \leq x < m$ o.s. bir $m \in \mathbb{Z}$ vardır.

İspat: a) $\frac{z}{y} \in \mathbb{R}$ olur Archimed özelliğinden

$\frac{z}{y} < n$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

Burada

$\frac{z}{y} \cdot y < ny \Rightarrow z < ny$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır

b) $\frac{1}{y} \in \mathbb{R}$ olur Archimed özelliğinden

$0 < \frac{1}{y} < n$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır

Burada $\frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$ elde edilir.

$\frac{1}{n} < y$ o.s. bir $n \in \mathbb{N}$ vardır.

c) $z \geq 0$

$A = \{m: m \in \mathbb{N} \text{ ve } m \geq z\} \subseteq \mathbb{N}$

Archimed özelliğinden $A \neq \emptyset$ dir.

$\mathbb{N}$ in iyi sıralama aksiyomundan
 A nun bir en küçük elemanı vardır
 bu elemana m diyelim

$$\left(\begin{array}{l} 0 \text{ halde } m \in A \text{ yani } m \geq 0 \\ n \geq 0 \text{ o.s her } n \in \mathbb{N} \text{ iken yani:} \\ \text{her } n \in A \text{ iken } m \leq n \end{array} \right)$$

$$0 \text{ halde } m-1 \notin A \quad \left(\begin{array}{l} \text{Çünkü } m-1 \in A \text{ olmalı idi} \\ m \leq m-1 \text{ olmalı idi} \end{array} \right)$$

$\rightarrow \leftarrow$

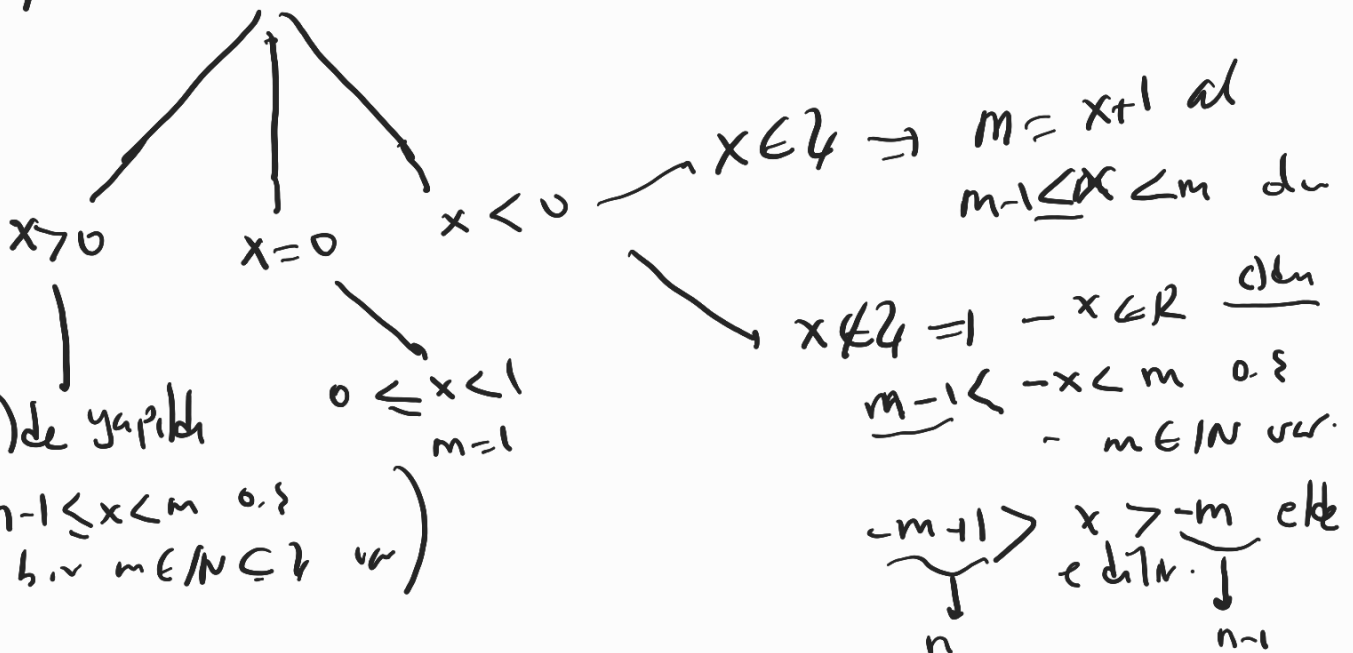
Dolayısıyla $m-1 \leq 0$

$m \geq 0$ iken

Dolayısıyla $m-1 \leq 0 < m$ elde

edilir.

d) $x \in \mathbb{R}$ alalım



($m-1 \leq x < m$ o.s
 b.v $m \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ var)

$-m+1 > x > -m$ elde edilir.
 $n \quad n-1$

"Ödev:

$$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$$

varsayalım ki

her $x \in A$ için

$x \geq c > 0$ o.s. Sabit

her $c > 0$ için.

$$\frac{1}{A} = \left\{ \frac{1}{x} : x \in A \right\} \quad \text{olmak üzere}$$

$$\sup\left(\frac{1}{A}\right) = \frac{1}{\inf A}$$

olduğunu gösteriniz.

(özellikle $\frac{1}{A}$ kısmının üstten sınırlı olduğunu göstermeniz lazım)