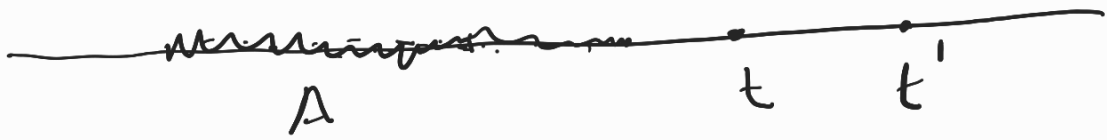


R nin Tamlik Özelliği

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq R$ olsun. Eğer her $x \in A$ için $x \leq t$ o.ş bir $t \in R$ varsa A kümesine üstten sınırlı bir küme, $t \in R$ sayısında da A kümesinin bir üst sınırıdır.



Gözlem: $\emptyset \neq A \subseteq R$ "üstten sınırlı bir küme ve $t \in R$ A kümesinin bir üst sınırı ise $t \leq t'$ olmak üzere $t' \in R$ sayısında A kümesinin bir üst sınırıdır.

Benzer şekilde

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq R$ olan. Eğer her $x \in A$ için $t \leq x$ o.ş bir $t \in R$ sayısı varsa A kümesine alttan sınırlı küme, $t \in R$ sayısında da A kümesinin bir alt sınırıdır.



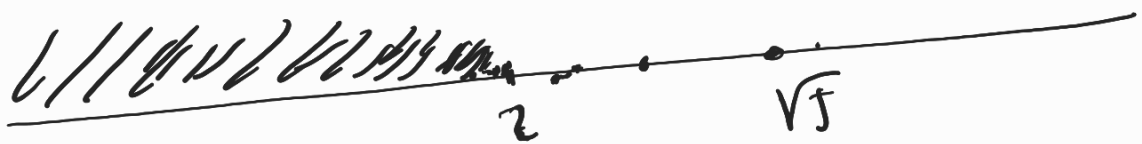
Göster: t A kümesinin bir alt sınırı
ve $t' \leq t$ ise $t' \in \mathbb{R}$ sayısı da
 A kümesinin bir alt sınırı olur

Tanım: $\emptyset \neq A$ hem üstten hemde alttan
sınırlı bir küme ise A kümesine sınırlı
küme denir.

Ör) $A = (-\infty, 2)$

A üstten sınırlı bir kümedir
örneğin $\sqrt{5}$ sayısı A kümesinin bir
üst sınırıdır

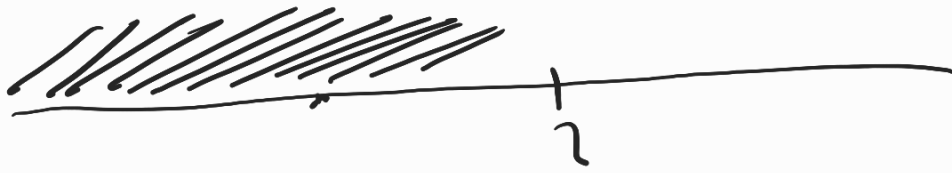
her $x \in A$ için $x < \sqrt{5}$



A kümesi alttan sınırlı değildir

Yani her $x \in A$ için $t \leq x$ o.s. bir
 $t \in \mathbb{R}$ sayısı yoktur. Bir başka ifade ile

hangi $t \in \mathbb{R}$ sayısını alırsak alalım
 $t > x$ o.s. bir $x \in A = (-\infty, 2)$ var



$$t > 2 \text{ in}$$

$$x = 0 \in A$$

$$0 < t$$

$$t < 2 \text{ in}$$

$$t-1 < 1 < 2 \Rightarrow t-1 \in A$$

$$\underbrace{t-1}_{\in A} < t$$

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ üstten sınırlı bir küme

olsun Eger

i) $s \in \mathbb{R}$ A kümesinin bir üst sınırı

ii) s' , A kümesinin herhangi bir üst sınırı iken $s \leq s'$

koşulları sağlanıyorsa $s \in \mathbb{R}$ sayısına A kümesinin en küçük üst sınırı (supremumu) denir ve $s = \sup A$ ile gösterilir.

Tanım: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$ alttan sınırlı bir küme
olsun.

- Eğer
- i) $t \in R$, A kümesinin bir alt sınırı
 - ii) $t' \in R$, A kümesinin herhangi bir alt sınırı ile

$$t' \leq t$$

koşulları sağlanıyor ise $t \in R$ sayısına A kümesinin en büyük alt sınırı (infimum) denir ve $t = \inf A$ ile gösterilir.

Not: $\emptyset$ hem üstten hem alttan sınırlı bir küme olarak kabul edilir.

Örnek: $\emptyset \notin A$ üstten sınırlı bir küme olsun
eğer s_1 ve s_2 A kümesinin en küçük üst sınırları ise $s_1 = s_2$ dir.

İspat: $s_1 = \sup A$, $s_2 = \sup A$ olsun

1) $s_1 = \sup A$.

- i) s_1 , A kümesinin bir üst sınırı
- ii) s' , A nın herhangi bir üst sınırı
ise $s_1 \leq s'$

Benzer şekilde

2) $s_2 = \sup A$ olduğundan

i) S_2 , A n n bi ust S_1

ii) S_1 , A n n heraf bi ust S_2

$$\text{da } S_2 \leq S_1$$

2) da S_2 A n n at S_1

1) ii) da $S_1 \leq S_2$ olur (1)

Berter seluk

1) da S_1 , A n n at S_2

2) ii) da $S_2 \leq S_1$ olur (2)

$$(1) \quad S_1 \leq S_2 \Rightarrow S_1 - S_2 \leq 0$$

$$(2) \quad S_2 \leq S_1 \Rightarrow S_1 - S_2 \geq 0$$

$$\text{yani } S_1 - S_2 \in \{ \leq 0 \} \cup \{ \geq 0 \}$$

$$S_1 - S_2 \in (\{ \leq 0 \} \cup \{ \geq 0 \})$$

$$P \cap (\neg P) = \emptyset \quad \text{olduguna}$$

$$S_1 - S_2 = 0 \quad \text{yani } S_1 = S_2 \quad (\text{R n n i\u00e7ine})$$

Bence soru

Öneri: $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$

alttan sınırlı bir küme

$$t_1 = \inf A$$

$$t_2 = \sup A \text{ in } t_1 = t_2$$

ör.

$$ör) A = (0, 2)$$

$$\sup A = 2$$

$$\inf A = 0$$

olduğunu gösterelim.

Gör: i) 2 sayısının A kümesinin bir üyesi

$$\text{Sınırlıdır} \quad (x \in A = (0, 2) \Rightarrow 0 < x < 2)$$

ii) s $A = (0, 2)$ kümesinin herhangi bir üst sınırı olsun

$$\underline{2} \leq \underline{s} \quad \text{olduğunu göstereceğiz.}$$

Önerme varsayalım ki $2 \leq s$ doğru bir ifade değil o halde bu durumda

$$2 > s \text{ olur.}$$

$$0 < s < \boxed{\frac{s+2}{2}} < 2$$

$$\frac{s+2}{2} \in A = (0, 2)$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{her } x \in A = (0, 2) \\ s \geq x > 0 \end{array} \right)$$

Bu ise s 'nin

A kümesinin bir üst sınırı olması ile
 eşdeğer olarak $2 \leq S$ olması
 yani $2 = \sup(0, 2)$ elde edilir.

($0 = \inf(0, 2)$ olduğu için)

Göster: Yukarıdan ki sonuçlarda anlatacağı,
 $\bar{u} = \sup A$ A kümesine ait
 $t = \inf A$ olmak zorunda değil.

8.) $S = \sup A$ olan $-A = \{-x : x \in A\}$ olmak
 üzere

$-S = \inf(-A)$ olur.

Çöz: i) $-S$ sayısının $-A$ kümesinin
 bir alt sınırı olduğunu
 ii) t , $-A$ kümesinin herhangi bir alt
 sınırı ise $t \leq -S$ olduğunu
 gösterelim.

$-S$, $-A$ kümesinin bir alt sınırıdır

$S = \sup A$ idi olarak S , A kümesinin
 bir üst sınırıdır. O halde her $x \in A$ için
 $x \leq S$ dir.

Burada

$$-x \geq -s \text{ elde edilir}$$

$$0 \text{ halde } -x \in -A \text{ (herhangi bir)} \\ \text{element}$$

$$\text{in } -x \geq -s \text{ elde ettik yani}$$

$-s, -A$ kümesinin bir alt sınırıdır.

şimdi

$t, -A$ kümesinin herhangi bir alt
sınırı olmak üzere $t \leq -s$ olduğunu
göstereceğiz.

$t \in \mathbb{R}$ sayısı $-A$ kümesinin herhangi
bir alt sınırı olsun

$$0 \text{ halde her } x \in A \text{ için} \\ t \leq -x \text{ olur.}$$

Burada her $x \in A$ için

$$-t \geq x \text{ elde edilir}$$

Dolayısıyla $-t \in \mathbb{R}$ sayısı A
kümesinin bir üst sınırıdır. Ök yunder

$$s = \sup A \text{ idi}$$

$$s \leq t \text{ olur}$$

Burada

$$t \leq -s \text{ elde edilir} \left(\begin{array}{l} \text{Göstermek} \\ \text{İstediğimiz} \\ \text{bulduk} \end{array} \right)$$

$$0 \text{ her } -s = \inf(-A) \text{ elde edilir}$$

Berter selilde

Ödev: $t = \inf A$ ise $-t = \sup(-A)$
 olur. Gösteriniz.

Supremum ve Infimumun Denk olması

Teorem: $\emptyset \neq A$ üstten sınırlı bir küme olan
 $s = \sup A \iff$
 i) s, A kümesinin bir üst sınırıdır
 ii) her $\epsilon > 0$, $s - \epsilon < a \leq s$
 o.ş. her $a \in A$ var

İspat: $(\implies) \quad s = \sup A \text{ olan}$

i) s, A nın bir üst sınırıdır

ii) s', A nın herhangi bir üst sınırı

Öz $s \leq s'$ dir.

$S = \sup A$ ise

S, A kümesinin bir üyesi

Şunu da

her $\varepsilon > 0$ için

$$S - \varepsilon < a \leq S \quad \text{o.k.} \quad \text{her } a \in A$$

olduğunu gösterelim.

Varsayalım ki (*) sağlanmıyor (yani (*)'nin doğru olmadığı)

0 halde öyle bir $\varepsilon_0 > 0$ var ki her $a \in A$ için

$$S - \varepsilon_0 \geq a$$

Bu durumda $S - \varepsilon_0$ A kümesinin bir üst sınırı olur

$S = \sup A$ idi. Dolayısıyla

$$S \leq S - \varepsilon_0 \quad \text{olur} \quad \rightarrow \leftarrow$$

0 halde (*) ifadesi doğrudur

Yani her $\varepsilon > 0$ için $S - \varepsilon < a \leq S$ o.k. bir $a \in A$ vardır.

($\Leftarrow$) (i) ve (ii) koşulları sağlanıyor olan

$S = \sup A$ olduğunu göstereceğiz

(i) koşulunda S, A kümesinin bir üyesi

Şimdi

s' , A kümesinin bir üst sınırı olsun

$s \leq s'$ olduğunu göstereceğiz

varsayalım ki $s \leq s'$ önerisi doğru değil o halde bu durumda

$s > s'$ olur. yani

$$\epsilon_0 = s - s' > 0 \text{ olur.}$$

(i) den $s - \epsilon_0 < a \leq s$ o.ş. dir $a \in A$ var

$$s - \epsilon_0 = \underbrace{s - (s - s')}_{s'} < a \leq s$$

$s' < a \leq s$ o.ş. $a \in A$ var

Burada $s' < s$ olması

o halde $s \leq s'$ olması yani $s = s'$ olması

(ör) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ olduğunu gösterelim
 $(A+B = \{a+b : a \in A, b \in B\})$

Çöz:

$$s = \sup A \quad t = \sup B \text{ olsun}$$

$$s+t = \sup(A+B) \text{ olduğunu göstereceğiz}$$

$$i) \quad s+t \quad A+B \text{ kümesinin bir üst}$$

Sınırıdır

$$s, A \text{ nın hi üst sınırı } (s = \sup A)$$

$$\text{her } a \in A \text{ için } a \leq s$$

$$t, B \text{ nın hi üst sınırı } (t = \sup B)$$

$$\text{her } b \in B \text{ için } b \leq t$$

$$\underline{a+b} \in \underline{A+B} \quad \text{çünkü } (a \in A, b \in B)$$

$$\underline{a+b} \leq \underline{s+t} \Rightarrow s+t, A+B \text{ kümesinin hi üst sınırı}$$

$$ii) \quad \varepsilon > 0 \text{ verilsin}$$

$$s+t-\varepsilon < \underline{a+b} \leq s+t \quad \text{v.s. } a+b \in A+B$$

olduğunu göstereceğiz

$$s = \sup A \Rightarrow \underline{s - \frac{\varepsilon}{2}} < a \leq s \quad \text{v.s. } a \in A$$

$$t = \sup B \Rightarrow t - \frac{\varepsilon}{2} < b \leq t \quad \text{v.s. } b \in B$$

Braçları

$$s+t-\varepsilon < a+b < s+t \quad \text{v.s. } a+b \in A+B$$

$$s+t \leq \sup(A+B) \text{ olur.}$$

Berter selhidi

Teorem: $\emptyset \neq A$ altta sınırlı bñ küme için

$$t = \inf A \iff$$

i) t, A nın bir alt sınırı

ii) her $\varepsilon > 0$ için

$$t \leq a < t + \varepsilon \quad \text{o.k.}$$

bir $a \in A$ var