

Reel Sayılar Kümesi

Reel Sayıların Cebirsel Özellikleri

$$(R, +, \cdot, 0, 1) \quad (+, \cdot : \text{ikili işlem})$$

- i) $a, b \in R$, $a + b = b + a$ ($+$ işleminin Değişme öz.)
- ii) $a, b, c \in R$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ ($+$ işleminin Birleşme öz.)
- iii) $a \in R$, $a + 0 = 0 + a = a$ (0 : $+$ işleminin birim elemanı)
- iv) $a \in R$, $a + b = 0$ 0 'ın bir ve bir tek $b \in R$ vardır $\left\{ \begin{array}{l} b \text{ elemanına } a \text{ elemanının} \\ + \text{ işlemine göre tersi} \end{array} \right.$
- v) $a, b \in R$, $a \cdot b = b \cdot a$ ($\cdot$ işleminin değişme öz.)
- vi) $a, b, c \in R$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ($\cdot$ işleminin birleşme öz.)
- vii) $a \in R$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 , $\cdot$ işleminin birim elemanı)
- viii) $a \in R$ ve $a \neq 0$ in $a \cdot b = 1$ 0 'ın bir ve bir tek $b \in R$ var $\left\{ \begin{array}{l} b, a \text{'nın} \\ \cdot \text{ işlemine göre} \\ b = \frac{1}{a} \text{ ile gösterilir.} \end{array} \right.$ tersi.
- ix) $a, b, c \in R$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ($\cdot$ işleminin $+$ işlemine göre dağılım özelliği)
- $(R, +, \cdot, 0, 1)$ bir cisimdir.

R'nin sıralama özelliği.

$\exists P \subseteq R$ "öyle ki"

i) $a, b \in P$ in $a+b \in P$

ii) $a, b \in P$ in $a \cdot b \in P$

iii) $-P = \{-1 \cdot a : a \in P\}$

olmak üzere

$$R = P \cup \{0\} \cup (-P)$$

olur

(Ayrık birleşim
 $P \cap (-P) = \emptyset$
 $0 \notin P$ $0 \notin -P$)

(Aslında P : pozitif reel sayılar kümesi)

iii) özelliğine R 'nin toplama özelliği denir

yani $a \in R = \underbrace{P \cup \{0\} \cup (-P)}_{\text{ayrık birleşim}}$ in

$$a \in P, \quad a=0 \quad \text{veya} \quad a \in -P$$

Önerme:

$a \in R$ in $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ dir.

İspat:

$$a \cdot 0 = a \cdot (0+0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$

$a \cdot 0$ in $+$ işlemine göre tersi
olan eleman $-a \cdot 0$ ile gösterelim

$$0 = a \cdot 0 + (-a \cdot 0) \quad \text{olur}$$

$$a \cdot 0 + (-a \cdot 0) = (a \cdot 0 + a \cdot 0) + (-a \cdot 0)$$

$$0 = \underline{a \cdot 0}$$

$$0 = a \cdot 0 + \underbrace{(a \cdot 0 + (-a \cdot 0))}_0 = a \cdot 0 + 0 = a \cdot 0$$

(0 in $\cdot$ işlemine göre tersi yoktur)

Örnek: $-(-a) = a$ $(-1)(-1) = 1$

$a \neq 0$ olmak üzere

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

İspat: Korkuy

Soru: $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

$\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ olabilir mi??

Örnek: $a \cdot a = a^2 = 2$ o.s bir rasyonel

sayı yoktur.

(Eğer $a^2 = 2$ o.s bir $a \in \mathbb{R}$ varsa)
bu a sayısı rasyonel olmaz)

İspat: varsayalım ki $a^2 = 2$ o.s bir a
rasyonel sayısının var olduğu düşünelim

$a = \frac{p}{q}$ p ve q sadeleşmeyen iki
($q \neq 0$) tam sayı

(pozitif) $a^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ in $p^2 = 2q^2$ yeri

p^2 çift $\Rightarrow 2 \mid p^2 = p \cdot p \Rightarrow 2 \mid p$

Dolayısıyla $p = 2m$ o.s. bir $m \in \mathbb{N}$

ve

$$2 = \frac{p^2}{q^2} = \frac{(2m)^2}{q^2} = \frac{4m^2}{q^2} \Rightarrow 4m^2 = 2q^2$$

$$q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \text{ çift} \Rightarrow q \text{ çift}$$

hem p hem q çift $\rightarrow$

(p ile q aralarında asal idi)

(Not: $a^2 = 2$ o.s. bir $a \in \mathbb{R}$ nin varlığı)
ileride gösterilecek.

$\mathbb{R}$ üzerinde sıralama:

$$\exists P \subseteq \mathbb{R}$$

i) $a, b \in P$ in $a+b \in P$

ii) $a, b \in P$ in $a \cdot b \in P$

iii) $\mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup (-P)$ (Ayırık birleşik)

$$-P = \{-a : a \in P\} \quad (-a = (-1) \cdot a)$$

Tanım: $a, b \in \mathbb{R}$ olsun

$$a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{P}$$

Sore: olroah tanm kiyah

$$i) a < b, c < d \Rightarrow a + c < b + d$$

$$ii) a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

$$iii) a < b, c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c < b + c$$

Isbat: i) $a < b, c < d$ olum

$$a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{P}$$

$$c < d \Rightarrow d - c \in \mathbb{P} \Rightarrow b - a + d - c \in \mathbb{P}$$

$$\text{yani } b + d - a - c = b + d - (a + c) \in \mathbb{P} \\ \Rightarrow a + c < b + d$$

$$ii) a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{P}$$

$$c > 0 \Rightarrow c - 0 = c \in \mathbb{P} \Rightarrow \underbrace{c}_{\in \mathbb{P}} \cdot \underbrace{(b - a)}_{\in \mathbb{P}} \in \mathbb{P}$$

$$0 \text{ halde } c(b - a) = cb - ca \in \mathbb{P} \Rightarrow ca < cb$$

$$iii) a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{P} \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\underbrace{b - a}_{\in \mathbb{P}} = b + c - (a + c) \in \mathbb{P} \Rightarrow a + c < b + c$$

Özellik: $a > 0 \Leftrightarrow a \in P$

$$a < 0 \Leftrightarrow 0 - a \in P \Leftrightarrow -a \in P$$

$$\Leftrightarrow -(-a) = a \in -P$$

Tanım: $a > b \Leftrightarrow a > b$ veya $a = b$
 yani $a > b \Leftrightarrow a - b \in P$ veya $a - b = 0$

Sunular kolaylıkla gösterilebilir.

$$a < b, c \in R \Rightarrow a + c < b + c$$

$$a < b, c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$$

$$a < b, c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$$

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

$$a < b, b < c \Rightarrow a < c$$

$$a < b, b \leq c \Rightarrow a < c$$

Önerme: $a > 0$ ise $\frac{1}{a} > 0$

İspat: öncelikle $1 > 0$ olduğunu gösterelim
 öncelikle $1 \neq 0$ idi Dolayısıyla

bu önerme doğruluğundan

$K \sim$

$1 \in P$ veya $1 \in -P$

1EP olduğu (yani esdeger olarak 170)
göstermektedir

$1 \notin P \Rightarrow$ boş $\Rightarrow$ temel seti

$1 \in -P$ olgani idi $-1 \in P$ duvdu

$$1 = \underbrace{(-1)}_{\in P} \cdot \underbrace{(-1)}_{\in P} \in P \rightarrow 1 \in P \cap (-P) = \emptyset \rightarrow \leftarrow$$

Dolayısıyla $1 \in P$ yani 170

$\frac{1}{a} \in P$ oldugun gstercegin.

$$\frac{1}{a} \in P \vee \{0.25(-P)$$

matikk $\frac{1}{a} \neq 0$ oldugun gskelin

$\frac{1}{g} = 0$ olma idi $a \neq 0 \Rightarrow a \in P$

$$\Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow 1 = \underbrace{0}_{\text{EP}} \cdot \underbrace{\frac{1}{a}}_0 : a \cdot 0 = 0 \rightarrow \leftarrow$$

1 1 1 1 40

0 halde $\frac{1}{a} \neq 0$

Simdi $\frac{1}{a} \notin -P$ olduğunu göster

$$\frac{1}{a} \in -P \Rightarrow -\frac{1}{a} \in P$$

$$a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = - \underbrace{\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)}_1 = -1 \in P$$

$$1 \in -P \quad \rightarrow \quad \left(1 \in P\right)$$

0 halde $\frac{1}{a} \in P$ dir.

Beraberlik $a < 0$ in $\frac{1}{a} < 0$
olduğu gösterilir (Aksioma)

Önerme: $a < b$ in $a < \frac{a+b}{2} < b$
dur.

İspat: $a < b \Rightarrow b - a \in P$

$$1 \in P \Rightarrow 1 + 1 = 2 \in P \Rightarrow \frac{1}{2} \in P$$

$$\frac{a+b}{2} - a = \frac{b-a}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in P} \cdot \underbrace{(b-a)}_{\in P} \in P$$

0 halde $a < \frac{a+b}{2}$

$$b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathbb{P}} \underbrace{(b-a)}_{\in \mathbb{P}} \in \mathbb{P}$$

$$\frac{a+b}{2} < b$$

yani: $a < \frac{a+b}{2} < b$ elde edilir.

Özel olarak $\underline{a > 0}$ in $a > \frac{1}{2} \cdot a > 0$ elde edilir.

Teorem: $a \geq 0$ u eğer her $\varepsilon > 0$ için
 $a < \varepsilon$ in $a = 0$ dir.

İspat: $a \geq 0 \Rightarrow \boxed{a > 0}$ veya $a = 0$

eğer her $\varepsilon > 0$ için $a < \varepsilon$ koşulu sağlanıyor in $a = 0$ olduğunu yani $a > 0$ olamayacağını göstreceğiz

$a > 0$ olsa idi bir eneli senece

$$a > \underline{\frac{1}{2}a} > 0 \text{ olur}$$

$\frac{1}{2}a \in \mathbb{P}$ yani

$$\underbrace{\frac{1}{2}}_{\in \mathbb{P}} \underbrace{a}_{\in \mathbb{P}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} a > 0$$

absah $a < \varepsilon = \frac{1}{2} a$
 olur Bu x bir
 Gerçektir.

Teorem: eğer $ab > 0$ in $a > 0, b > 0$ ya da
 $a < 0, b < 0$ dur

İspat: Siz yapabilirsiniz.

4 durum var
 i) $a > 0, b > 0$ iii) $a < 0, b < 0$
 ii) $a > 0, b \leq 0$ iv) $a < 0, b > 0$
 eğer $ab > 0$ in b durumlar
 ii) ve iv) nin olmayacağını
 göstereceğiz

Teorem: $a \in \mathbb{R}$ in $a^2 = a \cdot a \geq 0$ dur.

İspat: $a \in \mathbb{R} = \mathbb{P} \cup \{\neg \exists \vee (-\mathbb{P})\}$

$a = 0$ in $a^2 = a \cdot a = 0 \cdot 0 = 0$ dur.

$a \in \mathbb{P}$ in $a^2 = \underbrace{a}_{\in \mathbb{P}} \cdot \underbrace{a}_{\in \mathbb{P}} \in \mathbb{P} \Rightarrow a^2 > 0$

$a \in -\mathbb{P}$ in $-a \in \mathbb{P}$

$a^2 = a \cdot a = (-a) \cdot (-a) \in \mathbb{P} \Rightarrow a^2 > 0$

Teorem:

$n \in \mathbb{N}$ in $n \in \mathbb{P}$ (yani $n > 0$)
dr

formula
 $1 \in \mathbb{P}$ (gördük)

varsayalım ki $k \in \mathbb{P}$ olsun

$\underbrace{k+1}_{\in \mathbb{P}} \in \mathbb{P}$

$\rightarrow$ her $n \in \mathbb{N}$ için $n \in \mathbb{P}$
yani $n > 0$

Teorem:

$a > b \geq 0$ in $a^2 > b^2$ dir

$a > b \Rightarrow a - b \in \mathbb{P}$

$a^2 - b^2 = \underbrace{(a-b)}_{\in \mathbb{P}} \underbrace{(a+b)}_{\in \mathbb{P}} \in \mathbb{P} \Rightarrow a^2 > b^2$

Benzer şekilde $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ olduğunu
gösterebiliriz (Not: her $\sqrt{a}$ için
varlığını biliyoruz)

(yani $a > 0$ in
 $x \cdot x = a$ o.s. bir $x \in \mathbb{R}$
sıfırdan büyük ve küçük olduğunu
biliyoruz)

Gök kullanarak iki eşitsizlik

1) Aritmetik - Geometrik Ortalama Eşitsizliği:

$$a, b \geq 0 \quad \text{in}$$

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{aritmetik ortalama}} \geq \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{geometrik ortalama}}$$

(eşitlik sadece $a=b$ iken geçerli)

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

2) Bernoulli Eşitsizliği:

$n \in \mathbb{N}$, $a > -1$ olmak üzere

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

kanunlarla gösterilebilir.