

Tanım: Sayılabilir olmayan kümelere
Sayılamaz kümeler der.

Önerme: $S \subseteq T$ olsun
i) Eğer T sayılabilir bir küme ise
 S kümeside sayılabilir.

ii) S sayılamaz bir küme ise T de
sayılamaz bir kümedir.

Önerme: Aşağıdakiler birbirine denktir

a) S sayılabilir bir kümedir

b) $\mathbb{N} \rightarrow S$ örten fonksiyon vardır

c) $S \rightarrow \mathbb{N}$ bire-bir fonksiyon vardır.

İspat:

a) $\Rightarrow$ b

S sayılabilir bir küme olsun
İki durum söz konusudur

1. durum: S sonlu bir kümedir.

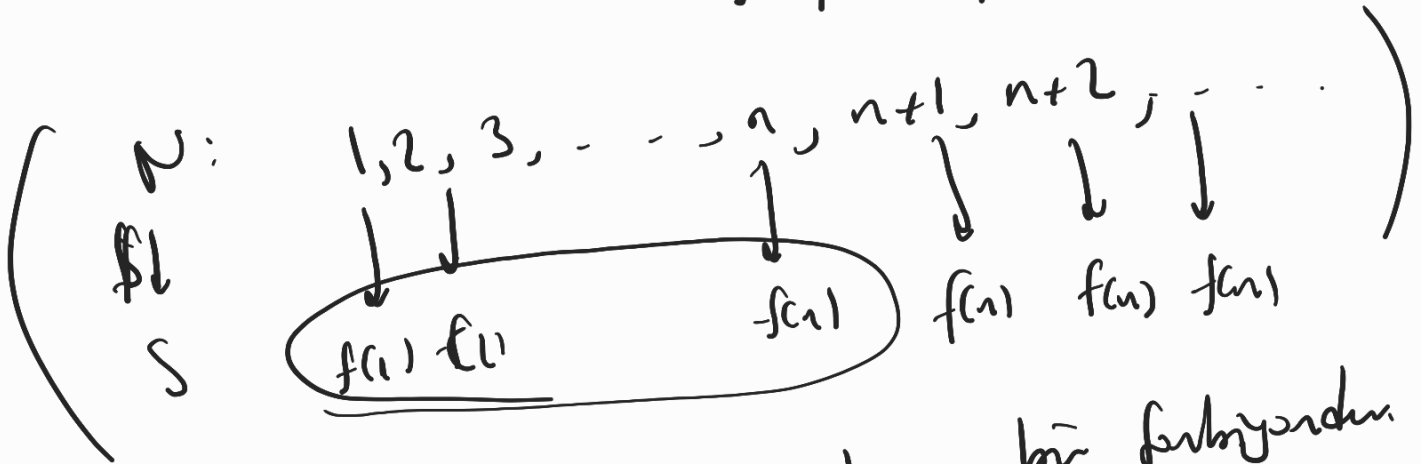
Bu durumda bir $n \in \mathbb{N}$ için

$f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow S$ birebir örten
bir fonksiyon vardır.

2. durum: Sayı

$H: \mathbb{N} \rightarrow S$ örten fonksiyondur
 tanımlayacağız:

$$H(k) = \begin{cases} f(k) & 1 \leq k \leq n \text{ in} \\ f(n) & k > n \text{ in} \end{cases}$$



$\forall: \mathbb{N} \rightarrow S$ örten bir fonksiyondur.

2. adım: $\mathbb{N} \rightarrow S$ birer bir örten bir
 fonksiyon varsa yapacak bir şey yok.

b) $\Rightarrow$ c $H_1: \mathbb{N} \rightarrow S$ örten bir
 fonksiyon olsun

her $s \in S$ için $H_1(k) = s$ o.s
 en az bir $k \in \mathbb{N}$ var

yani. bir başka ifade ile

$$\text{her } s \in S \text{ için } H_1^{-1}(s) = \{k \in \mathbb{N} : H_1(k) = s\} \neq \emptyset$$

O halde Her $s \in S$ için $\emptyset \neq H_1^{-1}(s) \subseteq \mathbb{N}$

iyi sıralama aksiyomundan her $s \in S$ için
 bir en küçük $k \in \mathbb{N}$

$f: I, (s)$ $\rightarrow$ $\mathbb{N}$
elemanı var

$$H: S \rightarrow \mathbb{N}$$

$H(s) = k_s = \min H_1(s)$ olarak
tanımlayalım.

H bire-bir

$$m = H(s) = H(t) \text{ olsun}$$

$$H(m) = s \quad (H(s) = m)$$

$$H_1(m) = t \quad (H(t) = m)$$

$$s = H_1(m) = t \text{ olup } H \text{ bire-bir}$$

$c) \Rightarrow a)$

$$H: S \rightarrow \mathbb{N} \text{ bire-bir fonksiyon}$$

olsun Bu durumda

$$H: S \rightarrow H(S) \text{ bire bir ve}$$

örten bir fonksiyon

$$\text{Öte yandan } \underline{H(S)} \subseteq \underline{\mathbb{N}} \text{ olduğundan}$$

$H(S)$ sayılabilir bir küme

(Hatırlatma: A kümesi sayılabilir
bir küme $\Leftarrow f: B \rightarrow A$
bire bir öten f varsa
 B kümesinde sayılabilir olur)

$$H: S \rightarrow \underbrace{H(S)}_{\text{sayılabilir}} \text{ bire bir öten}$$

Öyleyse S sayılabilir bir kümedir

Sonuç: $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sayılabilir külemler
(Sayılabilir) ailesi

(yani her $n \in \mathbb{N}$ için A_n sayılabilir)
kümelerden

Bu durumda $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ kümesinde
Sayılabilir kümedir.

İspat: yukarıdaki önermeden $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow A$
örneğin bir fonksiyon bulmak yeteli
(veya $A \rightarrow \mathbb{N}$ bir fonksiyon bulmak)
yeteli

$a \in A = \bigcup A_n$ alalım
bu durumda a en az bir A_n
kümeye ait yani

$$\emptyset \neq \{n \in \mathbb{N} : a \in A_n\} \subseteq \mathbb{N}$$

İyi Sıralama aksiyomundan

$$k_a = \min \{n \in \mathbb{N} : a \in A_n\} \text{ var}$$

Öte yandan her $n \in \mathbb{N}$ için A_n
olabilir olduğundan yukarıdaki

Sayılabılır
 Şemeden her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow A_n \text{ vter var.}$$

$$\varphi_{k_a}: \mathbb{N} \rightarrow A_{k_a} \text{ vter } 0 \text{ halde}$$

$$\emptyset \neq \{n \in \mathbb{N} : \varphi_{k_a}(n) = a\} \subseteq \mathbb{N}$$

İyi sıralama aksiyomundan

$$m_a = \min \{n \in \mathbb{N} : \varphi_{k_a}(n) = a\} \text{ var}$$

0 halde

$$\varphi: A \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$a \mapsto (k_a, m_a)$ olarak tanımlan
 fonksiyon iyi tanımlı ve bire-bir

$$\varphi(a) = \varphi(b) \text{ in } a=b$$

$$((k_a, m_a) = (k_b, m_b) \Rightarrow a=b)$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ m sayılabilir sorunu bir line

olduğu yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bire-bir
 vter bir eşleme olduğu bilgilendir

$$A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{bire-bir}} \mathbb{N} \text{ bire-bir}$$

birbir
Dolayısıyla A sayılabilir bir kümedir.

Bir az sergizmel olarak
olduğu $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ şeklinde
sayılabilir bir küme
söyleyebiliriz

$$\begin{aligned} A_1 &= \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, \dots\} \\ A_2 &= \{a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24}, \dots\} \\ &\vdots \\ A_n &= \{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}, a_{n4}, \dots\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} & \cancel{a_{14}} & a_{15} & \dots \\ \cancel{a_{21}} & \cancel{a_{22}} & \cancel{a_{23}} & a_{24} & a_{25} & \dots \\ & & & & & \ddots \end{array}$$

Sonuç 2: A rasgelel sayılar kümesi sayılabilir

$$A = \underbrace{A^+}_{\text{sayılabilir}} \cup \{0\} \cup \underbrace{A^-}_{\text{sayılabilir}}$$

sayılabilir
kümenin sayılabilir
Sıfırda (bırakarak sıfır)
bir kısmı sayılabilir.

Sonuç 3: A ve B sayılabilir iki kümenin
birleşimi sayılabilir

$A \times B$ sayılabilir bir kümedir.

İspat:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

$$a \in A \text{ için } \{a\} \times B \subset A \times B$$

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

A sayılabilir bir küme olduğundan

$A \times B$ sayılabilir

Sayıdan (A nın eleman sayısı) kadar

kümenin büyüklüğü

her $a \in A$ için

$$B \rightarrow \{a\} \times B$$

$$b \rightarrow (a, b)$$

birer birer

B sayılabilir $\Rightarrow \{a\} \times B$ sayılabilir.

Dolayısıyla

$$A \times B = \bigcup_{a \in A} \{a\} \times B$$

Sayılabilir sayıdan sayılabilir kümenin birleşimi olup sayılabilir.

Teorem (Cantor): $\emptyset \neq A$ olsun

$P(A)$: A nın tüm alt kümelerinin kümesi olsun.

$A \rightarrow P(A)$ artık bir fonksiyon tanımlanamaz.

$W \rightarrow P(W)$ örneği yok!
 Dolayısıyla en basitli mende
 $P(W)$ sayılabılır bir küme değil

İspat: $\varphi: A \rightarrow P(A)$ bir örneğin bulunup bulunmadığını varsayalım

her $a \in A$ için $\varphi(a) \in P(A)$ yani

$\varphi(a)$ A 'nın bir alt kümesi

o halde her $a \in A$ için
 $a \in \varphi(a)$ ya da $a \notin \varphi(a) \subseteq A$

$D = \{a \in A: a \notin \varphi(a)\}$ kümesini
 düşünelim

(D , Boş küme olabilir)

$D \subseteq A$ olduğundan $D \in P(A)$

$\varphi: A \rightarrow P(A)$ örneği olduğundan

$\varphi(a_0) = D$ o.ş. bir $a_0 \in A$ var

$a_0 \in \varphi(a_0)$ veya $a_0 \notin \varphi(a_0)$

$a_0 \in \varphi(a_0) = D$

$$D = \{a: \underline{a \notin \varphi(a)}\} \text{ idi}$$

$$a_0 \in \varphi(a_0) = D \text{ olamaz}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Bu durumda} \\ a_0 \in D \\ \text{olup,} \\ a_0 \notin \varphi(a_0) \end{array} \right)$$

0 halde

$$a_0 \notin \varphi(a_0) \Rightarrow a_0 \in D = \varphi(a_0)$$

→ ←

(Russel Paradoxu)

0 halde böyle bir $\varphi: A \rightarrow P(A)$ seti yoktur.

Dolayısıyla

$$\{\{n\}: n \in \mathbb{N}\} \subseteq \underline{P(\mathbb{N})} \text{ e } P(\mathbb{N}) \text{ sayılabilir}$$

değil 0 halde $P(\mathbb{N})$ sayılabilir

olmayan (sayılabilir) bir kümedir

Teorem: (Cantor): $\mathbb{R}$: reel sayılar kümesi sayılabilir bir küme değildir.

İspat: $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$

Eğer $(0, 1)$ sayılabilir olsaydı $\mathbb{R}$ nm de sayılabilir olurdu
göstersek $\mathbb{R}$ nm de sayılabilir değildir

Sayemik olur.

(Sonsuz) varsayalım (0,1) sayılabilir
bir küme olan Bu durumda
dur. $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow (0,1)$ birer-bir eşleme

$$\varphi(1) = 0, a_{11} a_{12} a_{13} \dots$$

$$\varphi(2) = 0, a_{21} a_{22} a_{23} \dots$$

$$c = 0, c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$$

$$c_1 \neq a_{11} \quad c_2 \neq a_{22} \quad c_3 \neq a_{33}$$

$$\dots \quad c_n \neq a_{nn}, \dots$$

$c \in (0,1)$ ve $\varphi(k) = c$ o.
bir $k \in \mathbb{N}$ yoktur.

her $k \in \mathbb{N}$ için $\varphi(k) = 0, a_{k1} a_{k2} \dots \underbrace{a_{kk}}_{\neq c_k} \dots \neq c$

$\mathbb{R}$ sayılabilir bir küme değildir

(Soru: $\mathbb{R} \rightarrow \textcircled{P(\mathbb{N})}$ birer-bir eşleme bulmaya çalışınız)

*) $\mathbb{R}$ sayılabilir küme

0.1)

$\mathbb{Q}$: sayılabilir bir küme

$\mathbb{Q}^*$ sayılabilir olur idi.

$\mathbb{R} = \underbrace{\mathbb{Q}^*}_{\text{sayılabilir}} \cup \underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{sayılabilir}}$ sayılabilir $\rightarrow \leftarrow$

0.2) $E = \{x \in \mathbb{R} : x^3 \notin \mathbb{Z}\}$ sayılamaz bir küme

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \setminus E &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 \in \mathbb{Z}\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 = n, \atop n \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt[3]{n}\} \text{ sayılabilir} \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \setminus E \text{ birer bir ortak} \\ n \rightarrow \sqrt[3]{n} \end{array} \right)$$

Eğer E sayılabilir olur

$\mathbb{R} = \underbrace{E}_{\text{sayılabilir}} \cup \underbrace{\mathbb{R} \setminus E}_{\text{sayılabilir}}$ sayılabilir $\rightarrow \leftarrow$

