

SAYILABİLİR KÜMELER

Tanım: $\mathbb{N} \rightarrow A$ bire-bir ve örten
bir fonksiyon varsa A kümesine bir
sayılabilir sonsuz küme denir

A sayılabilir sonsuz $\Leftrightarrow \exists f: \mathbb{N} \rightarrow A$
 $\Leftrightarrow f^{-1}: A \rightarrow \mathbb{N}$ bire-bir
örten

Ör) $\mathbb{N}$ sayılabilir sonsuz bir kümedir

$(I: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad I(n) = n \text{ bire-bir ve örten})$

$\mathbb{Z}$: tam sayılar kümesi sayılabilir sonsuz
bir kümedir.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$

$f(1) = 0$
 $f(n) = \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ tek in} \\ -\frac{n}{2} & n \text{ çift in} \end{cases}$

$\mathbb{N}:$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
$f \downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	
$\mathbb{Z}:$	0	-1	1	-2	2	-3	3	-4	4	

sayılabilir sonsuz bir

Or $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
kümeler.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$: m, n elemanlarını
 $m+n$ toplamına ve n 'nin artışı sırasına
sıralayalım

$\underbrace{(1,1)}_1, \underbrace{(2,1)}_2, \underbrace{(1,2)}_3, \underbrace{(3,1)}_4, \underbrace{(2,2)}_5, \underbrace{(1,3)}_6$

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$$f(1) = (1,1)$$

$$f(2) = (2,1)$$

$$f(3) = (1,2), \dots$$

~~$$(1,1), (2,1), (3,1), (4,1), \dots$$~~

~~$$(1,2), (2,2), (3,2), (4,2), \dots$$~~

~~$$(1,3), (2,3), (3,3), (4,3), \dots$$~~

~~$\vdots$~~

ör) $\mathbb{Q}^+$: pozitif rasyonel sayılar kümesi
sayılabilir sonsuz bir kümedir

$$\mathbb{Q}^+ = \left\{ \frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{N} \quad q \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}^+$ 'nın denemeleri paydasına göre sıralanır

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \dots$
 $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}, \dots$
 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, \dots$
 $\vdots$

aynı (kapsam yinelenen) $\mathbb{Q}^+$ içinde yapabiliriz. 0 halde $\mathbb{Q}^+$ de sayılabilir sonsuz bir kümedir.

Tanım: Eğer bir küme sonlu veya sayılabilir sonsuz ise o kümeye sayılabilir küme denir.

$\emptyset$ sayılabilir bir kümedir.

(Not: Eğer bir $n \in \mathbb{N}$ için $\{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A$ bir-biri arada bir farklı varsa A kümesine sonlu küme denir)

Teorem: A Sayılabilir bir küme ve
 $B \subseteq A$ ise B kümesinde sayılabilir.

İspat: A sayılabilir bir küme olduğundan
ya A sonlu bir kümedir veya A sayılabilir
sonsuz bir kümedir.

A sonlu bir küme ise
ve $B \subseteq A$ olduğundan B de sonludur

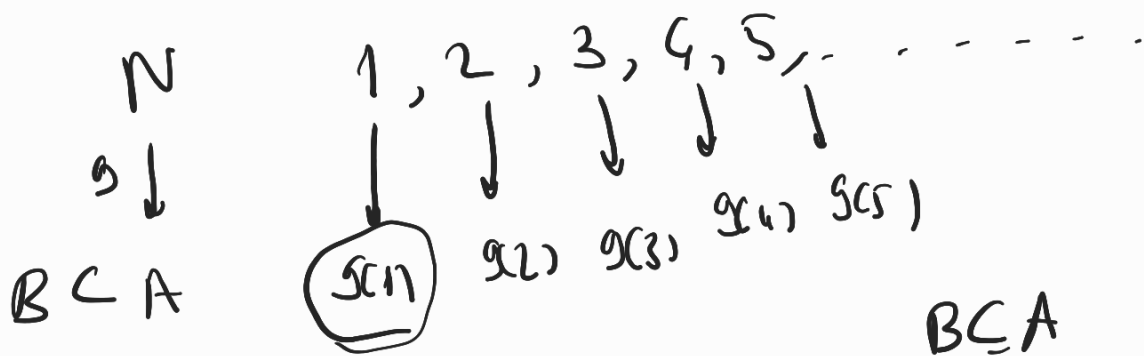
A sayılabilir sonsuz bir küme ve
 $B \subseteq A$ olsun $\begin{matrix} \nearrow \text{1. durum} & B \text{ sonlu} \implies \text{Sayılabilir} \\ \searrow \text{2. durum} & B \text{ sonsuz} \end{matrix}$

0 halde A sayılabilir sonsuz ve B sonsuz
olsun.

B nin sayılabilir sonsuz bir küme
olduğunu göstermek istiyoruz yani bir

$f: \mathbb{N} \rightarrow B$ bire-bir öten fonksiyon
bulmak istiyoruz.

A sayılabilir sonsuz olduğundan bir
 $g: \mathbb{N} \rightarrow A$ bire-bir öten var



$f: N \rightarrow B$ farklıya göre
 tanımlanıyor?

$$f(1) = g(k) \quad k = \min \{n: g(n) \in B\}$$

$\uparrow$
 N

diğerleri edilecek
 $\left(\emptyset \neq \{n: g(n) \in B\} = g^{-1}(B) \subseteq N \right)$ (g birebir
 ya sıralama kabulünden
 $g^{-1}(B) = \{n: g(n) \in B\}$ her bir
 bir en küçük (yani minimum) elemanı var)

(her bir gücün bir) varsayalım ki
 $f(1), f(2), \dots, f(k)$ tanımlanmış olsun

$$f(k+1) = g(m)$$

$$m = \min \{n: g(n) \in B - \{f(1), f(2), \dots, f(k)\}\}$$

$f: N \rightarrow B$ her bir eleman

(blayılıkla gösteriler)

Teorem: A ve B sayılabilir iki küme
ise $A \cup B$ ve $A \cap B$
sayılabilir dir.

İspat: $A \cap B \subseteq A$ bu orada
 $\downarrow$ teoreme $A \cap B$ sayılabilir

$A \cup B$ nm sayılabilir olduğunu
göstermek farklı durumlar söz konusudur

I. durum A ve B her ikisinde sonlu küme
bu durumda $A \cup B$ kümesinde sonlu olup
sayılabilir dir

II. Durum: A sonlu, B sayılabilir sonsuz
 $A \cup B = B \cup (A \cap B)$ (ayrık birleşim)

B sayılabilir sonsuz bir küme
olduğundan

bir $f: \mathbb{N} \rightarrow B$ bire-bir örten ve

$\Rightarrow A \cap B$ sonlu

$A \cap B \subseteq A \rightarrow$ sonlu

olduğundan bir $k \in \mathbb{N}$ için

$g: \{1, 2, \dots, k\} \rightarrow A \cup B$ bire-bir
ortak

Şimdi

$$h: \mathbb{N} \rightarrow A \cup B = \underline{B \cup (A \setminus B)}$$

$$h(n) = \begin{cases} g(n) & 1 \leq n \leq k \text{ in} \\ f(n-k) & n > k \text{ in} \end{cases}$$

h bire-bir ve örten

3. durum: A sayılabilir sonsuz B sonlu
(2. durumu aynısı)

4. durum: A ve B her ikisinde
sayılabilir sonsuz

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}$$

$$A \cup B = \{a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \dots\}$$

Yani

$f: \mathbb{N} \rightarrow A$ bire-bir ortak farklı ortak farklı

$g: \mathbb{N} \rightarrow B$ " " " " " " " " " "

$A \cup B$

$$h: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{A} \cup \mathbb{B}$$

$$h(n) = \begin{cases} f(\frac{n+1}{2}) & n \text{ tek } \text{in} \\ g(\frac{n}{2}) & n \text{ çift } \text{in} \end{cases}$$

h her h n n n

Ör) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x \in \mathbb{Z}\}$ kümesinin sayılabilir olduğunu gösteriniz.

Çöz: $x \in A$ in $x^2 + x \in \mathbb{Z}$
Yeni bir $n \in \mathbb{Z}$ iken $x^2 + x = n$
 $x^2 + x - n = 0$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 1 \cdot (-n) = 1 + 4n$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ in $\Delta > 0$ yeni

$x \in A$ in $x^2 + x \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

0 hald

$$A = \{x : x^2 + x \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

$x \in A$ in $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$x^2 + x - n = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4n}}{2}$$

$$A = \left\{ 0, -1, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{9}}{2}, \frac{-1-\sqrt{9}}{2}, \dots \right\}$$

$$A = B_1 \cup B_2$$

$$B_1 = \left\{ \frac{-1 - \sqrt{1+4n}}{2} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

$$B_2 = \left\{ \frac{-1 + \sqrt{1+4n}}{2} : n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$$

$$f: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow B_1$$

$$n \longrightarrow \frac{-1 - \sqrt{1+4n}}{2} \quad \text{birebirlikten}$$

$$g: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow B_2$$

$$n \longrightarrow \frac{-1 + \sqrt{1+4n}}{2} \quad \text{birebirlikten}$$

Bk. yukarıda

$$h: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{0\} \quad \text{birebirlikten}$$

$$n \longrightarrow n-1$$

$$h \circ f: \mathbb{N} \longrightarrow B_1 \quad \text{birebirlikten}$$

$$h \circ g: \mathbb{N} \longrightarrow B_2 \quad \text{birebirlikten}$$

B_1 ve B_2 sayılabilir sonsuz kümelere eşittir.

$A = B_1 \cup B_2$ sayılabilir sonsuzdur.

