

Ör) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2-1}{2n^2-5n} = \frac{1}{2}$ olduğunu gösterelim

Çzt: her $\varepsilon > 0$ için
 $n \geq k \Rightarrow \left| \frac{n^2-1}{2n^2-5n} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon$ o.s. bir $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
bulacağız.

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2-5n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2n^2-2-(2n^2-5n)}{2(2n^2-5n)} \right| = \left| \frac{5n-2}{2(2n^2-5n)} \right|$$

$k \geq 3$ varsayalım

Bu durumda

$n \geq k \geq 3$

Dolayısıyla

$$\left| \frac{n^2-1}{2n^2-5n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{5n-2}{2(2n^2-5n)} \right| = \frac{5n-2}{4n^2-10n} = \frac{5n}{4n^2-10n} - \frac{2}{4n^2-10n}$$

$$< \frac{5n}{4n^2-10n} = \frac{5}{4n-10} \leq \frac{5}{4k-10} \leq \varepsilon$$

$$\left(n \geq k \Rightarrow 4n-10 \geq 4k-10 \rightarrow \frac{5}{4n-10} \leq \frac{5}{4k-10} \right)$$

$$\frac{5}{4k-10} \leq \varepsilon \quad \text{yani} \quad 4k-10 \geq \frac{5}{\varepsilon}$$

$$\text{yani:} \quad k \geq \frac{\frac{5}{\varepsilon} + 10}{4} \quad \text{olmalı}$$

$$K = \max \left\{ 3, \left\lceil \frac{\frac{5}{\varepsilon} + 10}{4} \right\rceil + 1 \right\} \in \mathbb{N} \quad \text{alınabilir.}$$

Tanım: $X = (x_n)$ dizisi verilsin $M \in \mathbb{N}$ olsun

$$X: x_1, x_2, x_3, \dots, x_M, \underline{x_{M+1}}, \dots$$

$X_M = (x_{M+n})$ olarak tanımlanan

dizisi X dizisinin M . kuyruğu dır.

$$X_M = (x_{M+n})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$X_M: x_{M+1}, x_{M+2}, x_{M+3}, x_{M+4}, \dots$$

Teorem: $X = (x_n)$ dizisi verilsin ve $M \in \mathbb{N}$ olsun $(x \in \mathbb{R})$

$$X \rightarrow x \iff X_M \rightarrow x$$

İspat: $(\Rightarrow)$ $X \rightarrow x$ olsun

$X_M \rightarrow x$ olduğunu göstereceğiz yani

her $\varepsilon > 0$ için

$n \geq k \Rightarrow |x_{M+n} - x| < \varepsilon$ $\forall$ bir $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

bulacağız.

$\varepsilon > 0$ verilsin.

$X \rightarrow x$ olduğunu

$$n \geq k \Rightarrow |X_n - x| < \varepsilon \quad \text{o. s. b. } k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

aynı $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ için

$$M+n \geq n \geq k \Rightarrow |X_{M+n} - x| < \varepsilon$$

yani

$$n \geq k \Rightarrow |X_{M+n} - x| < \varepsilon \quad \text{olup} \quad X_{M+n} \rightarrow x \text{ dir.}$$

($\Leftarrow$) $X_M \rightarrow x$ olsun

$\varepsilon > 0$ verilsin $X_M \rightarrow x$ olduğundan

$$n \geq k \Rightarrow |X_{M+n} - x| < \varepsilon \quad \text{o. s. b. } k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ var.}$$

$k' = k + M \in \mathbb{N}$ alalım

$\left(\begin{array}{l} k \quad \varepsilon' \quad n \text{ bağı.} \\ \text{değişir} \\ k' = k + M \quad \varepsilon' \text{ bağı.} \end{array} \right)$

$n \geq k' = k + M$ in

$(n-M) \geq k$ olur o halde $\left| \overset{X_n}{\sim} X_{M+(n-M)} - x \right| < \varepsilon$ olur

o halde $n \geq k' \Rightarrow |X_n - x| < \varepsilon \Rightarrow X_n \rightarrow x$

(Sonuç olarak Eger $X = (X_n)$ iraksaklı ise x in tüm büyüklüklerde iraksaklıdır.)

Teorem: (Karşılaştırma Argümanı): $X = (X_n)$ dizisi
 verilsin $x \in \mathbb{R}$, $c > 0$ ve (a_n) bir dizi olsun
 varsayalım ki her $n \in \mathbb{N}$ için

$$|X_n - x| \leq c a_n \text{ olsun}$$

Eğer $\lim a_n = 0$ ise $\lim X_n = x$ olur.

Kurall: $\varepsilon > 0$ verilsin
 $n \geq k \Rightarrow |X_n - x| < \varepsilon$ o.ş. bir $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
 bulacağız.

$a_n \rightarrow 0$ idi
 $n \geq k \Rightarrow |a_n - 0| = a_n < \frac{\varepsilon}{c}$ o.ş. bir $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

ayn. k' yi alalım
 $n \geq k \Rightarrow |X_n - x| \leq c a_n < c \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$

Bazı özel diziler

1) $\lim b^n = 0$ ($|b| < 1$, b sabit)

$|b| < 1$ dolayısıyla $-1 < b < 1$

I. adım: $0 < b < 1$ in

$\frac{1}{b} > 1$ olur

$\frac{1}{b} = 1 + a$ o.ş. $a > 0$ vardır.

Yeni $b = \frac{1}{1+a}$ olur

$b^n = \frac{1}{(1+a)^n}$ $a > 0$

$(1+a)^n \geq 1+na$ (Bernoulli Eşitsizliği)

0 halde

$b^n = \frac{1}{(1+a)^n} \leq \frac{1}{1+na} < \frac{1}{n \cdot a} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$

Yeni

$|b^n - 0| < \left(\frac{1}{a}\right) \cdot \left(\frac{1}{n}\right) \rightarrow 0$

$\left(\lim \frac{1}{n} = 0\right)$

Karşılaştırmaya argümanında

$b^n \rightarrow 0$ olur.

serisi dir

II. durum: $b=0$ in $b^n=0$
 $\lim b^n = \lim 0 = 0$

III. durum: $-1 < b < 0$

$0 < -b < 1$ olur.

I. durumdan

$|b^n - 0| = |(-b)^n - 0| < c \frac{1}{n}$ o.s $c > 0$ var

karşılaştırmaya argümanında $b^n \rightarrow 0$

$$2) \lim c^{\frac{1}{n}} = 1, \quad c > 0 \text{ sabit}$$

I. durum: $c > 1$ için
her $n \in \mathbb{N}$ için $c^{\frac{1}{n}} > 1$ olur

her $n \in \mathbb{N}$ için

$$c^{\frac{1}{n}} = 1 + b_n$$

o.ş $b_n > 0$ var

$$c = (c^{\frac{1}{n}})^n = (1 + b_n)^n \geq 1 + nb_n \quad (\text{Bernoulli eşitsizliği})$$

$$c - 1 \geq nb_n \quad \text{yani} \quad b_n \leq \frac{c-1}{n} \text{ olur.}$$

$$|c^{\frac{1}{n}} - 1| = b_n \leq \underbrace{(c-1)}_0 \frac{1}{n}, \quad \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

küçükleme argümanından $c^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ olur.

II. durum: $c = 1$ için $c^{\frac{1}{n}} = 1^{\frac{1}{n}} = 1$, ve

$$\lim c^{\frac{1}{n}} = \lim 1 = 1$$

III. durum: $0 < c < 1$ için

$$0 < c^{\frac{1}{n}} < 1 \text{ olur.} \quad \text{bu halde her } n \in \mathbb{N} \text{ için}$$

$$\frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} > 1 \text{ olur.}$$

yani her $n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{c^{\frac{1}{n}}} = 1 + d_n$ o.ş $d_n > 0$ var

$$d_n = \frac{1}{c^{1/n}} - 1$$

$$\left| c^{1/n} - 1 \right| = \left| \frac{1}{1+d_n} - 1 \right| = \left| \frac{-d_n}{1+d_n} \right| = \frac{d_n}{1+d_n}$$

Steigend

$$c = (c^{1/n})^n = \left(\frac{1}{1+d_n} \right)^n = \underbrace{\frac{1}{(1+d_n)^n}}_{\text{Bernoulli's Ungleichung}} \leq \frac{1}{1+nd_n} < \frac{1}{nd_n}$$

o. halbiert

$$\left| c^{1/n} - 1 \right| = \frac{d_n}{1+d_n} < d_n$$

Steigend

$$c < \frac{1}{nd_n} \Rightarrow nd_n < \frac{1}{c} \Rightarrow d_n < \frac{1}{nc}$$

$$\left| c^{1/n} - 1 \right| < d_n < \underbrace{\left(\frac{1}{c} \right)}_{\downarrow} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{n} \right)}_{\rightarrow 0}$$

berücksichtigen
Argumente $c \rightarrow 1$ dann

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/n} = 1$$

$$n^{1/n} > 1 \quad \text{für } n \geq 2$$

$$n^{\frac{1}{n}} = 1 + k_n \quad \text{o.s.} \quad k_n > 0 \quad \text{ve} \quad \text{her } n \geq 2 \text{ için}$$

$$n = (n^{\frac{1}{n}})^n = (1 + k_n)^n = 1 + \binom{n}{1} k_n + \binom{n}{2} k_n^2 + \dots + k_n^n$$

$$n = \underline{1 + n k_n + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2 + \dots + k_n^n}$$

$n \geq 2$ için

$$n > \underline{1 + \cancel{n k_n} + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2} \geq \underline{1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2}$$

$n \geq 2$ için

$$n > 1 + \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$$

olur. yani

$$n-1 > \frac{n(n-1)}{2} k_n^2$$

Burada

$n-1$ 'e b1

$$1 > \frac{n}{2} k_n^2 \Rightarrow k_n^2 < \frac{2}{n} \Rightarrow k_n < \underline{\sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{n}}}$$

$n \geq 2$ için

$$\underline{|n^{\frac{1}{n}} - 1| = k_n} < \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow 0 \quad n \geq 2$$

kıyaslaştırma Argümanından $n^{\frac{1}{n}}$ değeri 1.
kaynağın limiti 1 dolayısıyla $n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$ olur.