

DİZİLER

Tanım: $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyona bir dizi denir.

$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ bir dizi

$f(n)$ ye bu dizinin n . termi.
(veya genel termi.) denir.

genellikle dizileri $X, Y, Z, \dots$ gibi harflerle göstereceğiz.

$$X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$X(n)$ ye X dizinin n . termi.
denir ve genellikle X_n ile gösterilir.

Örneğin:

$$X: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X(n) = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

n tek ise

n çift ise

$$X_1 = X(1) = 1$$

$$X_2 = X(2) = -1$$

$$X_3 = X(3) = 1$$

$$X_4 = X(4) = -1$$

$$X_5 = X(5) = 1$$

$\vdots$

$$X_n = X(n) = (-1)^{n+1}$$

Bazen dizileri formülünü sıralayarak da yazabiliriz

Örneğin yukarıdaki dizi

$$X: 1, -1, +1, -1, +1, -1, \dots$$

şeklinde de yazabiliriz.

yukarıdaki örnekteki gibi dizilerin genel terini bir formül ile ifade edebiliriz

Örneğin: $X_n = (-1)^{n+1}$ gibi bu durumda n terimleri yazabiliriz

$$X_3 = (-1)^{3+1} = 1$$

$$X_6 = (-1)^{6+1} = -1$$

$$X_5 = (-1)^{5+1} = 1$$

Örneğin $X_n = n^2$ genel terini ile dizinin formülünü yazabiliriz.

$$X_1 = 1^2 = 1$$

$$X_2 = 2^2 = 4$$

$$X_3 = 3^2 = 9$$

$$X_4 = 4^2 = 16$$

⋮

Yeni bir diziği X ile gösterir

$X: 1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$

X_n : X dizisinin n üncü terimi. $(n. \text{terimi})_n$
 X dizisini $X = (X_n)$ ile gösterir.

Örneğin yukarıdaki dizi: $X = (X_n) = (n^2)$ ile gösteriyoruz.

Bazen dizilerin herhangi bir terimi
kuvvetinden önceki terim veya terimlere bağlı
olarak ifade edilir bu şekilde ifade edilen
dizilere iteratif diziler denir

a) $X = (X_n)$ dizi:

$$X_1 = 1, X_2 = 1$$

$$\underline{X_n} = \underline{X_{n-2}} + \underline{X_{n-1}} \quad n \geq 3 \text{ için}$$

$$X_3 = X_1 + X_2 = 1 + 1 = 2$$

$$X_4 = X_2 + X_3 = 1 + 2 = 3$$

$$X_5 = X_3 + X_4 = 2 + 3 = 5$$

$$X_6 = X_4 + X_5 = 3 + 5 = 8$$

$X = (x_n)$ dizisinin terimleri

$X: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$

(Fibonacci dizisi)

8.) $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$, $x_1 = 1$ şeklinde
iteratif dizinin terimlerini yazalım

$$x_2 = \sqrt{2+x_1} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$$

$$x_3 = \sqrt{2+x_2} = \sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$x_4 = \sqrt{2+x_3} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

$$x_5 = \sqrt{2+x_4} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$x_6 = \sqrt{2+x_5} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$$

$\vdots$

Diziler aralarında bir aritmetik veya
geometrik olabilir, toplenebilir, çarpılabilir ve bir
sayı ile çarpılabilirler.

1) $X = (x_n)$ $Y = (y_n)$ iki dizi ise

$X+Y = (x_n + y_n)$ olarak tanımlar.

$$\text{ör} \quad X = (n^2) \quad Y = \left(\frac{1}{n}\right) \text{ dizi}$$

$$X+Y = \left(n^2 + \frac{1}{n}\right) \text{ olur}$$

$$\begin{array}{lcl} X+Y & \text{dizisi} & 1. \text{ terim} = x_1 + y_1 = 1^2 + \frac{1}{1} = 2 \\ & \vdots & 2. \text{ } \ddots \quad x_2 + y_2 = 2^2 + \frac{1}{2} \\ & \vdots & 3. \text{ } \quad \quad x_3 + y_3 = 3^2 + \frac{1}{3} \\ & \vdots & n. \text{ } \quad \quad x_n + y_n = n^2 + \frac{1}{n} \end{array}$$

$$2) \quad X = (x_n) \quad \vee \quad Y = (y_n) \text{ dizi verildi}$$

$$X \cdot Y = (x_n y_n) \text{ olarak tanımlanır.}$$

$$a) \quad X = (n^2) \quad Y = \left(\frac{1}{n}\right) \text{ dizi:}$$

$$X \cdot Y \text{ dizi}$$

$$X \cdot Y = \left(n^2 \cdot \frac{1}{n}\right) = \left(\frac{1}{n}\right) \text{ olur.}$$

$$3) \quad c \in \mathbb{R} \quad X = (x_n) \text{ olsun}$$

$$c \in \mathbb{R} \text{ sayıları, her teriminde } c \text{ olur}$$

bir sabit dizi olarak dağılır
 $c = (c)$ (sabit dizi olarak dağılır)

2) den dolayı

$$\underline{cX} = (cX_n) \text{ olur.}$$

$$4) X = (X_n) \text{ e } Y = (Y_n) \left(\begin{array}{l} \text{ie her } n \in \mathbb{N} \\ \text{tam } Y_n \neq 0 \end{array} \right)$$

$$\text{ne } \frac{X}{Y} = \left(\frac{X_n}{Y_n} \right) \text{ olarak tanımlar.}$$

$$ör) X = (n^2) \quad Y = \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$\frac{X}{Y} = \left(\frac{n^2}{\frac{1}{n}} \right) = (n^3)$$

Dizilerin Limiti

Tanım: $X = (X_n)$ dizi verilsin $L \in \mathbb{R}$ olsun
Eğer L nin her komşuluğunda $X = (X_n)$
dizinin her ne kadar çok terimi (yani
sonlu sayıda terim dışında) bulunursa
bu $L \in \mathbb{R}$ sayısına $X = (X_n)$ dizinin bir limiti
dur.

Yani $\underline{L \in \mathbb{R}}$ $X = (X_n)$ dizisinin bir limiti
 ancak $\underline{\text{yanlız her } \varepsilon > 0 \text{ için } (L - \varepsilon, L + \varepsilon)}$
 aralığı içinde (X_n) dizisinin hemen hemen her termi
 bulunur.

a) $X_n = c$ sabit dizisini düşünelim
 her $\varepsilon > 0$ için $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ aralığı
 içinde $X_n = c$ dizisinin her terimleri (yani
 c sayısı) bulunur. Böylelikle c sayısı
 $X_n = c$ sabit dizinin bir limiti olur.

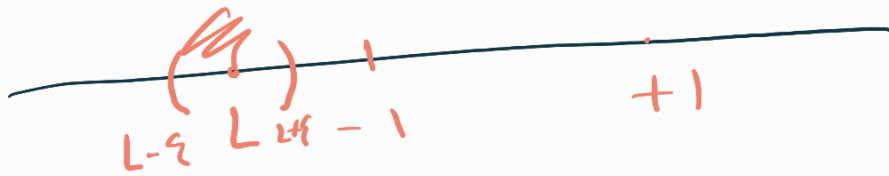


b) $(X_n) = ((-1)^n)$ dizisinin bir limiti
 yoktur.

$L \in \mathbb{R}$ in



$(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ aralığında $(X_n) = ((-1)^n)$
 dizisinin hiç bir termi bulunmayacak şekilde
 bir $\varepsilon > 0$ vardır.



$L = +1$ in

$\xi = \frac{1}{2}$ 70 al



$V_{\frac{1}{2}}(1) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ analitik desm

$(X_n - (-1)^n)$ ditionum Sonst + abhelt
term: verdr.

$$-1 \equiv X_1 = X_3 = X_5 = X_7 = X_9 = \dots$$

analitik desm

0 bald $L = 1$ $(X_n - (-1)^n)$ ditionum
limiti olam

$L = -1$ e bakt

$\xi = \frac{1}{2}$ al



$$V_{\frac{1}{2}}(-1) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$$

$$1 = X_2 = X_4 = X_6 = X_8 = \dots$$

$\frac{1}{n}(-1)^n$ in desm (sonst + abhelt)

0 hald $L = -1$ de $(X_n) = ((-1)^n)$ dizinin
limiti olamaz

Dolayısıyla $(X_n) = ((-1)^n)$ dizinin
bir limiti yoktur.

Teorem: $X = (X_n)$ dizisinin eğer limiti varsa
limit tektr.

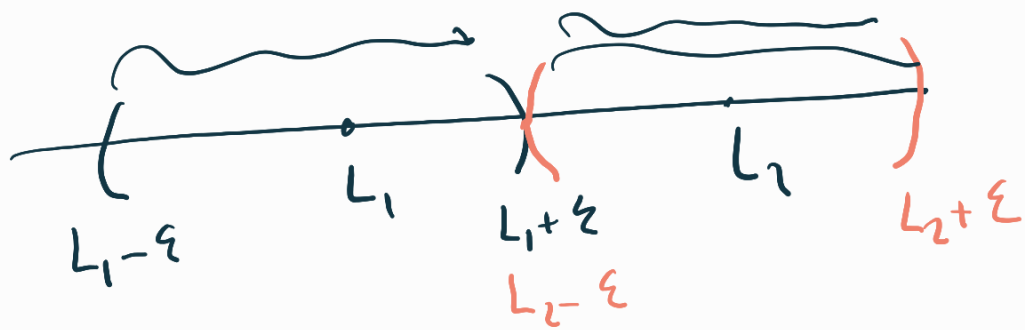
İspat: L_1 ve L_2 $X = (X_n)$ için
farklı limitleri olsun $(L_1 \neq L_2, L_1 < L_2)$ ^{veya}
 $\varepsilon = \frac{1}{2}(L_2 - L_1) > 0$ olarak alalım

L_1 $X = (X_n)$ dizisinin limiti olduğundan

$(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ aralığı içinde $X = (X_n)$
dizinin hemen hemen her terimi var

L_2 $X = (X_n)$ dizisinin limiti
olduğundan

$(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$ aralığı içinde $X = (X_n)$
dizinin hemen hemen her terimi var



her $(L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon)$ herde $(L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$
 aralıklarının içinde (x_n) dizisinin her
 her termi var $\in (L_1 - \varepsilon, L_1 + \varepsilon) \cap (L_2 - \varepsilon, L_2 + \varepsilon)$
 $= \emptyset$
 olmaları bu mümkün değildir.

Dolayısıyla $L_1 = L_2$ olmalı

Teorem: $X = (x_n)$ dizisinin bir limiti varsa
 bu doğru yakınsak dizi olur Eğer limiti
 yoksa yakınsak dizi olur
 $L \in \mathbb{R}$ sayısı (x_n) yakınsak dizisinin limiti ise

$\lim x_n = L$ ile gösterilir.

Teorem: $X = (x_n)$ dizisi verilen sayıya göre
 birbiriyle uyumlu

a) $\lim x_n = L$

b) $\forall \varepsilon > 0, X = (x_n)$ dizisinin her her bir
 termi: $\forall \varepsilon(L) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ aralığı içinde

c) $\forall \varepsilon > 0, \exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki
 $n \geq K$ için $x_n \in \bigcup_{\varepsilon} (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

d) $\forall \varepsilon > 0, \exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ öyle ki
 $n \geq K \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$

Kanıt: a) $\Rightarrow$ b) Tanım

b) $\Rightarrow$ c)

her $\varepsilon > 0$ için $x = (x_n)$ dizisinin
 her n için $x_n \in \bigcup_{\varepsilon} (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$
 her n için x_n bu aralıkta olur.

$(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ aralığının dışında $x = (x_n)$
 dizinin sonsuz sayıda terimi var
 Bu terimlerin her biri $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ dışındadır

$\{x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}\}$ sonsuz
 bir $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ aralığında olmayan terimler
 bir $K = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$ alalım

$K \in \mathbb{N}$ sayısı, $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ aralığına
 göre $\varepsilon > 0$ a bağlı

$n \geq K+1$ için $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ dir.

$K(\varepsilon) = K+1 \in \mathbb{N}$ olsun.

$n \geq K(\varepsilon)$ için $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ olur.

(c) $\Rightarrow$ d) her $\varepsilon > 0$ için $\exists K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$

çyle $n \geq K$ için $x_n \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

$n \geq K$ için $L-\varepsilon < x_n < L+\varepsilon$

$n \geq K$ için $-\varepsilon < x_n - L < \varepsilon$

$n \geq K$ için $|x_n - L| < \varepsilon$

d) $\Rightarrow$ a) Arah

ör) $(x_n) = (\frac{1}{n})$ dizisini düşünelim

$\lim x_n = \lim \frac{1}{n} = 0$ olduğunu gösterebiliriz.

d) yi kullanacağız

her $\varepsilon > 0$ için

$n \geq K \Rightarrow |x_n - 0| < \varepsilon$ o.s. bir $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulacağız.

$$|x_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

$$\frac{1}{k} < \varepsilon \quad 0,7 \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{işimitei gerer}$$

Yeni: $k > \frac{1}{\varepsilon}$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ izimitei gerer

$$k = k(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad \text{alınabilir.}$$

2) $\lim \frac{n}{n+1} = 1$ olduğunu gösterelim

$\forall \varepsilon > 0$ için $n > k \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$ o.s. için $k = k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulacağız

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} < \varepsilon$$

$\frac{1}{k} < \varepsilon$ o.s. için k doğal sayısı imitei gerer.

Yeni: $k > \frac{1}{\varepsilon}$ olacak

$$k = k(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad \text{alınabilir.}$$

8) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ olduğunu gösterelim

$\forall \varepsilon > 0$ için
 $n > K \Rightarrow \left| \frac{2^n}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$ v.s. bir $K = K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulacağız.

$$\left| \frac{2^n}{n!} - 0 \right| = \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} = \underbrace{\frac{2}{1}}_2 \cdot \underbrace{\frac{2}{2}}_1 \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\frac{2}{3}} \cdot \dots \cdot \underbrace{\frac{2}{n}}_{\frac{2}{n}} < 2 \cdot \frac{2}{n}$$

$$\left| \frac{2^n}{n!} - 0 \right| = \frac{2^n}{n!} < \frac{4}{n} \leq \frac{4}{K} < \varepsilon$$

$$\frac{4}{K} < \varepsilon \quad \text{v.s.} \quad K \in \mathbb{N} \text{ Bunu}$$

görmek

Yani $K > \frac{4}{\varepsilon}$ olmalı.

$$K = K(\varepsilon) = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \quad \text{almaktır}$$